Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL z ★ 2017 – Kolokwium I (1)

Zadanie 1. (10pt = 5 × 2pt)

Proste pytania, odpowiedzi na które należy krótko uzasadnić:

A. Dana jest skoczenie wymiarowa przestrzeń liniowa V nad ciaem $\mathbb{C}$ i endomorfizm $\varphi : V \to V$. Wiadomo, że φ ma tylko dwie wartości własne 0 i 1,

$$\dim(ker(\varphi^2)) < \dim(ker(\varphi^3)) = \dim(ker(\varphi^4))$$

oraz

$$\dim(ker(\varphi - Id)) < \dim(ker((\varphi - Id)^2)) = \dim(ker((\varphi - Id)^3)).$$

Jaki jest wielomian minimalny φ?

B. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem spełniającym $\varphi^3 = Id$, $\varphi \neq Id$. Jaki jest wielomian charakterystyczny φ?

C. Znaleźć część półprostą z rozkładu Jordana-Chevalleya endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{C}^7)$,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (z_7, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

D. Dana jest prosta afiniczna $L \subset \mathbb{Z}_3^4$. Ile jest płaszczyzn afinicznych w $\mathbb{Z}_3^4$ niezawierających L?

E. Czy złożenie dwóch rzutowań w przestrzeni afinicznej może nie mieć punktu stałego?

GAL z ★ 2017 – Kolokwium I (2)

Rozwiązania zadań proszę pisać na oddzielnych kartkach.

Zadanie 2. (10pt)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Dany jest endomorfizm $\varphi : V \to V$. Udowodnić, że jeśli $\dim V \geq 3$ to V zawiera podprzestrzeń φ – niezmienniczą W taką, że $0 < \dim W < \dim V$.

Zadanie 3. (10pt)

Niech V będzie przestrzenią liniową (nad dowolnym ciałem), $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Niech
μ_V będzie wielomianem minimalnym φ,
μ_W będzie wielomianem minimalnym $\varphi_{|W} : W \to W$,
$\mu_{V/W}$ będzie wielomianem minimalnym przekształcenia indukowanego $\overline{\varphi} : V/W \to V/W$.
a) Udowodnić, że μ_V dzieli iloczyn $\mu_W \mu_{V/W}$.
b) Udowodnić, że jeśli μ_W i $\mu_{V/W}$ nie mają wspólnych czynników, to $\mu_V = \mu_W \mu_{V/W}$.
c) Podać przykład dla którego $\mu_V \neq \mu_W \mu_{V/W}$.

Zadanie 4. (10pt)

Dane jest przekształcenie afiniczne $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające:
$f([2,2,3]) = [3,0,4]$,
$f([1,2,4]) = [3,3,5]$,
$f([1,2,3]) = [0,2,2]$,
$f([1,3,3]) = [2,5,3]$.
Podać wzór analityczny. Znaleźć punkty, proste i płaszczyzny niezmiennicze.

Df ma dwie całkowite wartoći własne.

Zadanie 5. (10pt)

Niech E będzie przestrzenią afiniczną. Wykazać, że dwie pary rozłącznych podprzestrzeni afinicznych (H_1, H_2) i (H_1', H_2') są afinicznie równoważne (to znaczy istnieje izomorfizma afiniczny $E \to E$ dla ktrego $f(H_i) = H_i'$, $i = 1, 2$) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\dim H_1 = \dim H_1', \quad \dim H_2 = \dim H_2' \quad \text{oraz} \quad \dim af(H_1 \cup H_2) = \dim af(H_1' \cup H_2')\,.$$