GAL*, konspekt wykładów: Tensory

8.6.2017

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

[Kos roz. 6]. Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Iloczyn tensorowy

1.1 Zewnętrzna suma prosta $S = V \oplus W$ (zbiór równy produktowi kartezjańskiemu z działaniami po współrzędnych) może być zdefiniowana przez diagram (przypomnienie)

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "i_V"'] \arrow[dr, "\forall\,\phi_V"] & \\
S \arrow[rr, dotted, "\exists!\,\phi"] & & U \\
& W \arrow[ul, "i_W"] \arrow[ur, "\forall\,\phi_W"'] &
\end{tikzcd}$$

1.2 [Kos roz.6 §5 Tw.3] Dla przestrzeni liniowych V i W rozważamy wszystkie odwzorowania 2-liniowe $\phi : V \times W \to U$. Istnieje przestrzeń $\mathbb{T}$ wraz z odwzotowaniem 2-liniowym $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ o tej własności, że każde przekształcenie ϕ faktoryzuje się jednoznacznie przez τ

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{T} \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\tilde{\phi}"] \\
V \times W \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\,\phi"'] & \\
& U
\end{tikzcd}$$

1.3 Przestrzeń V wraz z odwzorowaniem $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Oznaczana przez $V \otimes W$. Ma własność: dla każdej przestrzeni wektorowej U mamy

$$L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, U) = L(V \otimes W, U).$$

1.4 Konstrukcja efektywna $V \otimes W$ za pomocą baz w V i W. Wymiar $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

1.5 Inna konstukcja: elementami $V \otimes W$ są formalne kombinacje liniowe $\sum_i v_i \otimes w_i$, gdzie $v_i \in V$, $w_i \in W$. Wyrażenia te przekształcamy według reguł:

– $a\,v \otimes w = v \otimes a\,w$ dla $a \in \mathbb{K}$

– $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ oraz $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

1.6 $\tau : V \times W \to V \otimes W$ jest różnowartościowe modulo skalary, obrazem są tensory proste $v \otimes w$. Tensory proste rozpinają $V \otimes W$.

1.7 Ćwiczenie: niech $\dim V = \dim W = 2$. Udowodnić, że zbiór tensorów prostych w $V \otimes W$ jest zdegenerowaną kwadryką (zbiorem wektorów izotropowych, ze względu na pawną formę kwadratową). Gdy V i W mają większy wymiar, jedno równanie nie wystarzy. Udowodnić, że zbiór tensorów prostych można opisać układem równań kwadratowych.

1.8 Ćwiczenie: Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, oraz $\sum v_i \otimes w_i = 0$ to $w_1 = w_2 = \cdots = w_k$.

1.9 Macierz zamiany bazy w V przy zamianach baz w V i W jeśli
$\{\alpha'_k\}$, $\{\alpha_i = \sum_k a_i^k\, \alpha'_k\}$ bazy V,
$\{\beta'_\ell\}$, $\{\beta_j = \sum_\ell b_j^\ell\, \beta'_\ell\}$ bazy W,
to
$\alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{k,\ell} a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$,
w konwencji Einsteina
$\alpha_i \otimes \beta_j = a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$.

1.10 Jeśli

$$T = \sum_{i,j} T^{i,j} \alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{i,j} T'^{i,j} \alpha'_i \otimes \beta'_j,$$

to

$$T'^{i,j} = \sum_{k,\ell} T^{k,\ell}\, a_k^i\, b_\ell^j.$$

1.11 Ćwiczenie prawa przemienności i łączności $\otimes$.

2 Tensory c.d.

2.1 Prawo rozdzielności mnożenia $\otimes$ względem dodawania $\oplus$.

2.2 W dalszej części przez przekształcenie, izomorfizm, itp. *naturalny* rozumiemy niezależny od wyboru bazy. Pełne znaczenie słowa *naturalny* można wyrazić używając pojęć kategorii (patrz naturalna transformacja funktorów).

2.3 Dla przestrzeni liniowych W, Z zbiór przekształceń liniowych $L(W, Z)$ ma strukturę przestrzeni liniowej. Własność iloczynu tensorowego: istnieje *naturalne* przekształcenie,

$$L(V, L(W, Z)) \to L(V \otimes W, Z)\,,$$

które jest izomorfizmem. Jest ono zadane tak: dane $\alpha : V \to L(W, Z)$, definiujemy przekształcenie 2-liniowe $\beta : V \times W \to Z$, $\beta(v, w) := \alpha(v)(w)$. Teraz β zadaje $\tilde{\beta} : V \otimes W \to Z$.

2.4 Istnieje naturalne przekształcenie $V^* \otimes W \to L(V, W)$, które jest izomorfizmem, jeśli $\dim V < \infty$. Jeśli $\dim V = \infty$, to obraz składa się z endomorfizmów, których obraz jest skńczonego wymiaru.

2.5 Jeśli $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$ to $V^* \otimes W^* \simeq (V \otimes W)^*$.
Dow. przekształcenie z $V^* \otimes W^*$ wystarczy zadać na $V^* \times W^*$:

$$V^* \times W^* \to (V \otimes W)^* = L(V \otimes W, \mathbb{K}) = L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, \mathbb{K}).$$

Wystarczy na tensorach prostych

$$f \otimes g \mapsto \Big((v, w) \mapsto f(v)g(w)\Big).$$

Klasyczne tensory typu (p, q)

2.6 Tensory typu p-kowariantne q-kontrawariantne to funkcje $p+q$-liniowe

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

czyli elementy

$$\Big(\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \times \cdots \otimes V^*}_{q}\Big)^* \simeq$$

$$\simeq \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \times \cdots \otimes V}_{q}$$

W skrócie $\mathbb{T}_p^q(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$.

2.7 Tensor typu
(1,0) – funkcjonał
(0,1) – wektor
(1,1) – endomorfizm
(2,0) – forma 2-liniowa
(2,1) – np mnożenie w algebrze
(0,0) – skalar

2.8 Dana baza $\{\alpha_k\}$ przestrzeni V. Niech $\{\alpha^k\}$ baza sprzężona przestrzeni V^*, oraz dany tensor T typu (p,q). Jego współrzednymi w bazie $\alpha^{i_1} \otimes \dots \alpha^{i_p} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \dots \alpha_{j_q}$ są liczby

$$T_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = T(\alpha_{i_1} \times \dots \alpha_{i_p} \times \alpha^{j_1} \times \dots \alpha^{j_q})\,.$$

2.9 Reguły transformacji:
jeśli $\alpha_i = \sum_k a_i^k \, \alpha'_k$
niech $\alpha^j = \sum_\ell b_\ell^j \, \alpha'^\ell$.
(Macierz $(b_k^i) = (a_i^k)^{-1}$, nie trzeba transponować, bo transpozycja jest zawarta w notacji.)

$$T'^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} = \sum_{i',j'} b_{i_1}^{i'_1} \dots b_{i_p}^{i'_p} \, T^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p} \, a^{j_1}_{j'_1} \dots a^{j_q}_{j'_q}.$$

2.10 Co to za tensor $T_i^j = \delta_i^j$?

2.11 Który z następujących tensorów jest tensorem prostym? a) $T^{i,j} = i+j$, b) $T^{i,j} = i\,j$

3 Algebra symetryczna

3.1 Mnożenie tensorów: S typu (p,q), T typu (p',q'), to $S \otimes T$ typu $(p+p', q+q')$.

3.2 Zwężenie tensorów (kontrakcja)
– ślad $tr : End(V) = V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ zadany przez przekształcenie 2-liniowe $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f,v) \mapsto f(v)$.
We współrzędnych $\sum_{i,j} T_i^j \alpha^i \otimes \alpha_j \mapsto \sum_i T_i^i \in \mathbb{K}$

– dla wybranych indeksów $r \leq q$, $s \leq p$

$$tr^r_s : \mathbb{T}^q_p(V) \to \mathbb{T}^{q-1}_{p-1}(V)$$

$$tr^r_s(T)^{j_1,\cdots\overset{r}{\vee}\cdots j_q}_{i_1,\cdots\underset{s}{\vee}\cdots,i_p} = \sum_i T^{j_1,\cdots\overset{r}{i}\cdots j_q}_{i_1,\cdots\underset{s}{i}\cdots,i_p}.$$

3.3 Tensor metryczny to tensor typu (2,0), czyli forma 2-liniowa, która jest iloczynem skalarnym $G = \sum g_{i,j} e^i \otimes e^j$, zadaje izomorfizm $V \to V^*$, $v = \sum_i x^i e_i \mapsto \sum_{i,j} g_{i,j} x^i e^j = tr^1_1(g \otimes v)$
– ogólniej tesor metryczny pozwala opuszczać wskaźniki $\mathbb{T}^q_p(V) \to \mathbb{T}^{q-1}_{p+1}$

$$T \mapsto tr^r_1(G \otimes T)$$

– operacja podnoszenia wskaźników jest zadana przez zwężanie z tensorem typu (0,2),

$$T \mapsto tr^1_s(G^{-1} \otimes T)$$

gdzie $G^{-1} = \sum_{i,j} g^{i,j} e_i \otimes e_j$ spełnia $tr^1_1(G^{-1} \otimes G) = \sum_{i,j} \delta^j_i e^i \otimes e_j$ (macierzowo $[g^{i,j}] = [g_{i,j}]^{-1}$).

3.4 Algebra tensorowa. Przez $\mathbb{T}(V)$ oznaczamy algebrę tensorową

$$\mathbb{T}(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}^q(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} V^{\otimes q} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$$

3.5 Własność uniwersalna: Dla dowolnej algebry A z 1 nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry z 1}}(T(V), A)\,.$$

3.6 Tensory symetryczne : grupa permutacji Σ_q działa na $\mathbb{T}^q(V) = \mathbb{T}^q_0(V) = V^{\otimes q}$ permutując współrzędne. Tensor T jest symetryczny jeśli dla każdej permutacji $\sigma(T) = T$, tzn we współrzędnych $T^{i_1,i_2,\dots,i_q} = T^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\dots,i_{\sigma(q)}}$

3.7 Oznaczenia: $S^q(V) \subset \mathbb{T}^q(V)$ to przestrzeń tensorów symetrycznych,

3.8 Symetryzacja : zakładamy, że $char(\mathbb{K}) = 0$ i uśredniamy po permutacjach $\sigma \in \Sigma_q$

$$sym : V^{\otimes q} \to S^q(V), \qquad sym(T) = \tfrac{1}{q!} \textstyle\sum_\sigma \sigma(T),$$

Mamy $sym \circ sym = sym$, zatem sym jest rzutowaniem na przestrzeń tensorów symetrycznych.

3.9 Niech $e_1, e_2, \dots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = sym(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_q\}$ są bazą $S^q(V)$.

3.10 Ćwiczenie; obliczyć $\dim S^q(\mathbb{R}^n)$.

3.11 Algebra symetryczna: $s, t \in S(V)$, definiujemy mnozenie $s \odot t = sym(s \otimes t)$.

3.12 Dla $s, t \in \mathbb{T}(V)$ mamy $sym(sym(s) \otimes sym(t)) = sym(s \otimes t)$. Stąd $sym : \mathbb{T}(V) \to S(V)$ zachowuje mnożenie. Zatem $S(V)$ jest łączna.
Dow: jeśli $t \in \mathbb{T}^k(V)$, $s \in \mathbb{T}^\ell(V)$, to $u = sym(s) \otimes sym(t)$ jest tensorem symetrycznym ze względu na pierwszą i drugą grupę zmiennych. Zatem $sym(u) = \binom{k+\ell}{k}^{-1} \sum_{(k,\ell)-tasowania} \sigma(u)$.

3.13 Tensory symetryczne można utożsamić z przestrzenią ilorazową $S'^q(V)$ otrzymaną z $V^{\otimes q}$ przez przestrzeń rozpiętą przez

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_q) - (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_q).$$

Mamy naturalne odwzorowanie (bez założenia o charakterystyce ciała) $S^q(V) \to S'^q(V)$. Symetryzacja indukuje przekształcenie odwrotne.

3.14 Gdy $char\, \mathbb{K} \leq q$ przekształcenie $S^q(V) \to S'^q(V)$ nie jest izomorfizmem, np dla $q = 2$, $char\, \mathbb{K} = 2$ element przestrzeni ilorazowej $[v \otimes w]$ nie jest obrazem tensora symetrycznego.

3.15 $S^p((\mathbb{K}^n)^*)$= wielomiany jednorodne od n zmiennych.
(W szczególności $S^0((\mathbb{K}^n)^*) = \mathbb{K}$, $S^1((\mathbb{K}^n)^*) = (\mathbb{K}^n)^*$= formy liniowe.)

3.16 Własność uniwersalna: A algebra przemienna, nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry przemienne z 1}}(S(V), A)\,.$$

UZUPEŁNIENIE (nie było na wykładzie)

4 Algebra symetryczna (cd) i Algebra zewnętrzna

4.1 Jeśli $\mathbb{K}$ jest skończone to przekształcenie $S(V^*) \to Funkcje(V \to \mathbb{K})$ nie jest różnowartościowe. Np dla $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, gdy $V = \mathbb{K}$: wtedy $S(V^*) \simeq \mathbb{K}[x]$ i jądro składa się z wielomianów podzielnych przez $x^q - x$.

Algebra zewnętrzna

4.2 Tensor $T \in V^{\otimes q}$ jest antysymetryczny jeśli dla każdej permutacji σ $\sigma(T) = sgn(\sigma)\, T$. We współrzędnych:

$$T^{i_1, i_2, \ldots, i_q} = sgn(\sigma)\, T^{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(q)}}.$$

Oznaczenie przestrzeni tensorów antysymetrycznych $\Lambda^q(V)$.

4.3 Jedynie dla $q = 2$ mamy $V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$.

4.4 Operacja antysymetryzacji

$$A : V^{\otimes q} \to \Lambda^q(V)$$

$$A(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_q} (-1)^{sgn(\sigma)} \sigma(T).$$

Mamy $A \circ A = A$.

4.5 Mnożenie tensorów antysymetrycznych $a \wedge b = A(a \otimes b)$.

4.6 Niech $e_1, e_2, \ldots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = A(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 < i_2 < \ldots i_q\}$ są bazą $\Lambda^q(V)$. Stąd $\dim \Lambda^q(V) = \binom{\dim V}{q}$.

4.7 Iloczyn zewnętrzny: $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q = A(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) \in \Lambda^q(V)$

4.8 Potęga zewnętrzna przestrzeni sprzężonej $\Lambda^p(V^*)$ to p-formy alternujące na V. Gdy $n = \dim(V)$ generatorem $\Lambda^n(V^*)$ jest wyznacznik (rozumiany jako n-liniowa forma antysymetryczna $V^n \to \mathbb{K}$).

4.9 Niezdegenerowane przekształcenie 2-liniowe $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda^q(V^*) \times \Lambda^q(V) \to \mathbb{K}$ poprzez włożenie do $\mathbb{T}^q_q(V)$ i zwężenie wszystkich indeksów. Na bazie $\langle e^I, e_J\rangle = \frac{1}{q!}\,\delta^J_I$,

4.10 Żeby pozbyć się czynnika $\frac{1}{q!}$ dla form modyfikujemy definicję e^J tak, aby to była baza sprzężona do e_I. Traktując e^J jako tensor typu $(q, 0)$ mamy

$$(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_q})(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_q}) = \delta^J_I$$

(Jednak w literaturze zdarzają się też inne konwencje.)

4.11 Algebra zewnętrzna (Grassmanna): $\Lambda V = \bigoplus_{q=0}^{\dim V} \Lambda^q(V)$ ma strukturę algebry ze względu na $\wedge$ zdefiniowany jako $a \wedge b = A(a \otimes b)$.

4.12 Dla $s, t \in \mathbb{T}(V)$, mamy $A(s) \wedge A(t) = A(s \otimes t)$, czyli $A : \mathbb{T}(V) \to \Lambda V$ zachowuje mnożenie. Stąd ΛV jest łączna.
Dow: jeśli $t \in \mathbb{T}^k(V)$, $s \in \mathbb{T}^\ell(V)$, to $u = A(s) \otimes A(t)$ jest tensorem antysymetrycznym ze względu na pierwszą i drugą grupę zmiennych. Zatem $A(u) = \binom{k+\ell}{k}^{-1} \sum_{(k,\ell)-tasowania} sgn(\sigma)\sigma(u)$.

4.13 Mnożenie jest przemienne z uwzględnieniem gradacji (super-przemienne): tzn dla $a \in \Lambda^i V$, $b \in \Lambda^j V$ mamy $a \wedge b = (-1)^{ij}\, b \wedge a$.

Ćwiczenia o tensorach i potęgach zewnętrznych

4.14 (Zanurzenie Veronese) Rozważyć przekształcenie

$$\mathbb{K}^n = V \to S^k(V) = \mathbb{K}^m, \quad m = \binom{n+k-1}{k}, \quad v \mapsto \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{k}.$$

Pokazać, że indukuje ono włożenie $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^k(V))$. Opisać równaniami obaz.

4.15 (Zanurzenie Plückera). Niec $Gras_k(\mathbb{K}^n)$ oznacza zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{K}^n$. Wykazać, że przekształcenie $V = lin(v_1, v_2, \ldots, v_k) \mapsto lin(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) \in \mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{K}^n))$ jest dobrze określone. Opisać wielomianami obraz.

4.16 Niech $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ będzie antysymetryczną formą 2-liniową na $V = \mathbb{K}^{2n}$. Wykazać, że ω jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} \neq 0$.

4.17 Niech $v \in V$, $a \in \Lambda^q V$. Wykazać, że $v \wedge a = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = v \wedge b$ dla pewnego $b \in \Lambda^{q-1} V$

4.18 Pokazać, że Λ^q rozszerza się do funktora $\Lambda^q : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$.