GAL z ★ 2017

Konspekt wykładów: Formy 2-liniowe [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

25.4.2017

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przekształcenia 2-liniowe

1.1 Przekształcenia dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$. Przykłady:
– $V \times V^* \to \mathbb{K}$,
– A algebra nad $\mathbb{K}$, mnożenie:$A \times A \to A$
  – np, $A = L(V, V)$,
  – np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$.
– składanie przekształceń $L(W_1, W_2) \times L(W_2, W_3) \to L(W_1, W_3)$,
– mnożenie funkcji spełniających różne warunki, np $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

1.2 Przykład: Dane $1 < p < \infty$, niech ℓ^p oznacza zbór ciągów sumowalnych w p-tej potędzie (tzn $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p < \infty$). Dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_j$ (zbieżność wynika z nierówności Höldera).

1.3 Dane bazy $A = \{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$ przestrzeni V_1, $B = \{\beta_j\}_{i=1,\dots,m}$ przestrzeni V_2. Przekształcenie dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$ wyznaczone jest przez wartości na parach wektorów bazowych $\phi(\alpha_i, \beta_j)$.

1.4 Macierz przekształcenia dwuliniowego $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ w bazach to $M(\phi)_{A,B} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ taka, że $(M(\phi)_{A,B})_{i,j} = \phi(\alpha_i, \beta_j)$.

1.5 Indukowane przekształcenie $\phi^\# : V_2 \to V_1^*$ zadane wzorem $\phi^\#(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$. W bazach: $M(\phi^\#)_B^{A^*} = M(\phi)_{A,B}$.

1.6 Jeśli $M = M(\phi)_{st,st} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ jest macierzą $\phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ w bazach standardowych, to $\phi(X, Y) = X^T M Y$ (wektor zapisujemy jako kolumnę).

Formy 2-liniowe
Założenie $char(\mathbb{K}) \neq 2$.

1.7 Dla $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ transformacja macierzy $M(\phi)$ przy zmianie baz.

1.8 Jeśli $V_1 = V_2$, to $\mathbb{Q}$ nazywamy formą dwuliniową.

1.9 Forma dwuliniowa $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest niezdegenerowana jeśli:
(i) $\forall w \in V - \{0\}\ \exists v \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
(ii) $\forall v \in V - \{0\}\ \exists w \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
Jeśli $\dim(V) < \infty$ to (i) jest równoważne (ii) i jest równoważne
(iii) $M(\phi)$ jest macierzą niezdegenerowaną.

1.10 Powyższe punkty są równoważne:
(i) $\Leftrightarrow$ (i'): indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$ jest monomorfizmem.
(ii) $\Leftrightarrow$ (ii'): indukowane przekształcenie ${}^{\#}\phi : V \to V^*$ zadane wzorem $\#^{\phi}(v) = \phi(v,\,\cdot\,)$ jest monomorfizmem.

1.11 Ćwiczenie: wskazać formę 2-liniową, dla której (i) i (ii) nie są równoważne

1.12 Gdy $V_1 = V_2$, to przez macierz formy rozumiemy $M(\phi)_{\mathcal{A}} = M(\phi)_{\mathcal{A},\mathcal{A}} = \big(\phi(\alpha_i, \alpha_j)\big)_{1\le i,j\le \dim V}$.

1.13 Zamiana bazy a relacja **kongruencji** (porównaj z relacją podobieństwa)

$$(A \sim A') \;\Leftrightarrow\; \exists C \text{ odwracalna } : \; A' = C^T A C \,.$$

1.14 Załóżmy, że $\dim V < \infty$. Forma jest niezdegenerowana gdy jeden z równoważnych warunków zachodzi
– $\{w \in V \mid \forall\, v \in V\ \phi(v, w) = 0\} = \{0\}$
– $ker(\phi^{\#}) = \{0\}$
– $M(\phi)$ jest maksymalnego rzędu (w dowolnej bazie)
– $ker({}^{\#}\phi) = \{0\}$
– $\{v \in V \mid \forall\, w \in V\ \phi(v, w) = 0\} = \{0\}$

1.15 Formy symetryczne i antysymetryczne: $V_1 = V_2 = V$, $V_3 = \mathbb{K}$, $\phi(v, w) = \pm\phi(w, v)$

1.16 Przykłady:
– $V = C([0, 1])$, dana funkcja $\rho(x) \in V$ (gęstość) $\phi_\rho(f, g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$ – symetryczna
– V tjw, dane $x_0 \in [0, 1]$, $\phi_{\delta_{x_0}}(f, g) = f(x_0)g(x_0)$
– $V = C^1_0(\mathbb{R})$: $\phi(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$ – antysymetryczna.
– $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

1.17 Rozkład formy na sumę symetrycznej i antysymetrycznej.

1.18 Dla symetrycznej bądź antysymetrycznej formy dwuliniowej: Dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ do podprzestrzeni W.

1.19 Dla każdej 2-liniowej symetrycznej bądź antysymetrycznej formy mamy:
– $\{0\}^\perp = V$,
– $V^\perp = ker(\phi^{\#}) = ker({}^{\#}\phi)$,
– $W \subset (W^\perp)^\perp$ i równość zachodzi np gdy ϕ jest niezdegenerowana i $\dim V < \infty$

2 Formy symetryczne i antysymetryczne

2.1 Dana jest dwuliniowa forma (V, ϕ) symetryczna lub antysymetryczna, $A, B, W \subset V$
– $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
– gdy $\dim(V) < \infty$, to $\dim(V) \le \dim(W) + \dim(W^\perp)$ (bo $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(\phi^{\#}(W)) \ge \dim(V) - \dim(W)$).

2.2 Dla niezdegenerowanej formy mamy, $\dim(V) < \infty$
– $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$
– $W = (W^{\perp})^{\perp}$

2.3 Ćwiczenie. Udowodnić analogiczne własności dla przekształcenia dwuliniowego. $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ używając pojęcia anihilatora: dla $A \subset V_1$ definiujemy $anh(A) = \{w \in V_2 \,|\, \forall v \in A \; \phi(v, w) = 0\}$.

2.4 Rozkład przestrzeni na sumę prostą ortogonalną $A \overset{\perp}{\oplus} B$ (oznaczaną też $V = A \dot{\perp} B$).

2.5 Każdą przestrzeń z symetryczną bądź antysymetryczna formą 2-liniową można przedstawić jako $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$, gdzie U jest całkowicie zdegenerowana (tzn $\phi_{|U} = 0$), oraz W jest niezdegenerowana. Przedstawienie to jest jednoznaczne w następującym sensie: Jeśli $V = U \overset{\perp}{\oplus} W = U' \overset{\perp}{\oplus} W'$, to $U = U'$ oraz istnieje izomorfizm $f : W \to W'$ taki, że dla $v, w \in W$ mamy $\phi(v, w) = \phi(f(v), f(w))$.
Dow: $U = V^{\perp}$, $W \simeq V/U$.

2.6 Załóżmy, że ϕ jest symetryczna bądź antysymetryczna oraz niezdegenerowana, $\dim(V) < \infty$. Dana podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\phi_{|W}$ jest niezdegenerowana. Wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $\phi_{|W^{\perp}}$ jest niezdegenerowana.

2.7 Ćwiczenie: znaleźć przykład (V, ϕ) nieskończonego wymiaru taki, że istnieje $W \subsetneq V$, $W^{\perp} = \{0\}$.

2.8 Załóżmy, że ϕ jest antysymetryczna oraz niezdegenerowana, $\dim(V) < \infty$. (Mówimy, że ϕ jest symplektyczna.) Wtedy wymiar V jest parzysty oraz istnieje baza V: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ taka, że macierz formy w tej bazie jest blokowa $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Ta baza nazywa się bazą symplektyczną lub Darboux.

2.9 Wniosek z istnienia bazy symplektycznej: każda macierz antysymetryczna i niezdegenerowana jest kongruentna do macierzy $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, czyli postaci $C^T J C$.

2.10 Wniosek: wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest kwadratem. Z ćwiczeń wiemy, że istnieją formuły wielomianowe pozwalające wyciągnąć pierwiastek z wyznacznika: np

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix} = (x_{12}\,x_{34} - x_{13}\,x_{24} + x_{14}\,x_{23})^2 \,.$$

(patrz Pfaffian).

2.11 Załóżmy że ϕ jest symetryczna. Wtedy istnieje baza V, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.

2.12 O relacji **kongruencji** c.d.:
– Każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej.
– Jeśli $A \sim A'$ i $B \sim B'$ to $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$
– Macierz (a) jest kongruentna do $(k^2 a)$ dla $k \neq 0$.
– Jeśli $a + b \neq 0$, to macierz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest kongruentna do $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$.

2.13 Ćwiczenie (być może trudne): sklasyfikować formy dwuliniowe symetryczne $\mathbb{Q}^2$. Które macierze diagonalne 2×2 są kongruentne do macierzy jednostkowej?

(Zainteresowanym tą tematyką polecam książkę J. Milnor, D. Husemoller *Symmetric bilinear forms.*

2.14 Nad ciałem w ktżym można wyciągać pierwiastek z dowolnej liczby każda niezdegenerowana macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Diagonalizacja, rozkład KAM

3.1 Metoda Jacobiego: załóżmy, że dla macierzy $M(\phi)$ minory główne Δ_1, Δ_2,... Δ_n są różne od zera. Wtedy istnieje baza $\mathbb{K}^n$, w której ϕ ma postać diagonalną z liczbami Δ_1, Δ_2/Δ_1,... Δ_n/Δ_{n-1} na przekątnej.
Dokładniej: dana baza α_1, α_2, ... α_n. Szukamy indukcjnie bazy spełniającej
1) $\beta_1 = \alpha_1$,
2) $\beta_2 = \alpha_2 - c_{21}\beta_1$, $\phi(\beta_2, \beta_1) = 0$,
3) $\beta_3 = \alpha_3 - c_{31}\beta_1 - c_{32}\beta_2$, $\phi(\beta_3, \beta_1) = 0$, $\phi(\beta_3, \beta_2) = 0$,
itd. Wspóćzynniki c_{ij} $(i > j)$ są równe $\phi(\alpha_i, \beta_j)/\phi(\beta_j, \beta_j)$. Z warunku $\Delta_j \neq 0$ wynika, że $\phi(\beta_j, \beta_j) \neq 0$.

3.2 Metoda Lagrange'a diagonalizacji formy kwadratowej stowarzyszonej z symetryczną formą 2-liniową: znajdowanie współrzędnych, w których forma kwadratowa jest sumą kwadratów (uzupełnianie do pełnych kwadratów).

3.3 Jeśli $\Delta_i \neq 0$, to forma kwadratowa kwadratowa sprowadzona metodą Lagrange'a od sumy kwadratów ma postać:

$$\Delta_1 {x'_1}^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1} {x'_2}^2 + \tfrac{\Delta_3}{\Delta_2} {x'_3}^2 + \cdots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} {x'_n}^2 .$$

gdzie $x'_i = x_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j$.

3.4 Ćwiczenie: wyznaczniki kolejnych minorów mają znaki jak poniżej. Jakiej postaci może być forma?
a) $+\,0\,-$, b) $+ + 0 -$, c) $+ - 0 +$, d) $+ + 0 -$, e) $+ - 0 -$, itp.

3.5 Ćwiczenie: Czy możemy otrzymać ciąg znaków $+ + 0 +$?

3.6 Twierdzenie o bezwładności: Jeśli ciało jest uporządkowane i każdy element > 0 jest kwadratem (np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), to każda macierz symetryczna jest kongruentna do diagonalnej, a na przekątnej są tylko 1, –1 i 0. Ilości „1”, „0” i „–1” są jednoznacznie wyznaczone.
Dowód dla formy niezdegenerowanej: jeśli $k + l = k' + l' = n$ to albo $k + l' > n$ lub $k' + l > n$.

3.7 Równoważne sformułowanie: $(V, \phi) \simeq [\,1\,]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1]^\ell \overset{\perp}{\oplus} [\,0\,]^m$.

3.8 W Twierdzeniu o bezwładności liczby k, l, m:
– liczba k jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest dodatnio określona,
– liczba l jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest ujemnie określona,
– $m = \dim(V^\perp)$.

3.9 Liczba $\sigma = k - l$ nazywana jest sygnaturą formy. Sygnatura oraz rząd $r(M(\phi))$ wyznaczają typ formy z dokładnością do izomorfizmu liniowego. Innymi słowy wyznaczają klasę kongruencji $M(\phi)$. To wszystko jest prawda nad $\mathbb{R}$. Nad $\mathbb{Q}$ jest o wiele ciekawiej.

3.10 Formy określone dodatnio i ujemnie.

3.11 Kryterium Sylwestera orzekające kiedy forma jest dodatnio określona (będzie na nast'epnym wykładzie, ale nie jest to nic więcej niż wniosek z metody Jacobiego).

3.12 Ćwiczenie: Niech $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą jednostkową. Dana niezdegenerowana macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Udowodnić, że macierz blokowa $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{K})$ jest kongruentna z $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

3.13 Załóżmy, że ϕ jest formą symetryczną dwuliniową na $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje baza taka, że $M(\phi) = I$. Taka baza nazywa się ortonormalna.

3.14 Jełi ϕ jest standardową formą symetryczną dodtnió określoną w $\mathbb{R}^n$, (tzn $M(\phi)_{st} = I$, $B = M(Id)^{st}_{\mathcal{B}}$, to baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $B^T B = I$. Zbiór takich macierzy jest oznaczny przez $O(n)$ to jest podgrupa w $GL_n(\mathbb{R})$.

3.15 Diagonalizacja formy metodą Jacobiego w przypadku formy dodatnio określonej nazywa się ortogonalizacją Grama-Schmidta. W efekcie znajdujemy bazę ortogonalną, a później przeskalowując wektory bazę ortonormalną.

3.16 Dana baza $\mathcal{A}$. Ortogonalizacja G-S: $\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$, $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{(\beta_i,\beta_i)}}\beta_i$ (piszemy (α,β) zamiast $\phi(\alpha,\beta)$). Otrzymujemy procedurę

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ \text{dowolna baza} & \rightsquigarrow & \text{baza ortogonalna} & \rightsquigarrow & \text{baza ortonormalna.} \end{array}$$

gdzie $M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej (bo $M(Id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ jest taka), $M(Id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ jest diagonalna, $M^{st}_{\mathcal{C}} \in O(n)$.

3.17 Przyjmując:

$$G = M^{st}_{\mathcal{A}}(I), \quad K = M^{st}_{\mathcal{C}}(I), \quad A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(I), \quad N = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(I)$$

traktujemy ortogonalizację G-S jako algorytm pozwalający przedstawić dowolną macierz odwracalną G w postaci

$$G = K \cdot A \cdot N\,,$$

gdzie $K \in O(n)$, macierz A jest diagonalna z dodatnimi wyrazami, N górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej. To się nazywa rozkładem Iwasawy.

3.18 Przykład:
$\alpha_1 = (3,4)$, $\alpha_2 = (1,1) \rightsquigarrow \beta_1 = (3,4)$, $\beta_2 = (\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}) \rightsquigarrow \gamma_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $\gamma_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.19 Ćwiczenie. Rozkład Iwasawy KAN jest jednoznaczny. Mamy bijekcję

$$O(n) \times (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to GL(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$(K, A, N) \mapsto K \cdot A \cdot N\,.$$

(Tu $(\mathbb{R}_+)^n$ utoższamiamy ze zbiorem macierzy z wyrazami dodatnimi na przekątnej, $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ z macierzami górnotrójkątnymi z jedynkami na przekątnej.) Na przykład

$$GL(\mathbb{R}^2) \quad \simeq \quad O(2) \times (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}\,.$$

3.20 Ćwiczenie: Pokazać

$$SO(\mathbb{R}^3) \quad \simeq \quad \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\,.$$

gdzie $SO(n) = \{\mathbb{K} \in O(n) \mid det(K) = 1\}$.

4 Przekształcenia zachowujące formę. Kwadryki

4.1 Kryterium Sylwestera. Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ są dodatnie.

4.2 Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ mają naprzemienne znaki -+-+$\ldots(-1)^n$.

4.3 Forma dwuliniowa symetryczna niezdegenerowana, dodatnio określona, oznaczana przez (v, w), $\langle v, w\rangle$ lub $v.w$ nazywana jest loczynem skalarnym (naogół rozważany nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Q}$). Norma definiowana jest jako $||v|| = \sqrt{(v, v)}$. Ćw: Norma spełnia:

- $||v|| \geq 0$ oraz $(||v|| = 0 \ \equiv v = 0)$.
- $||av|| = |a|\,||v||$
- $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

4.4 Dane formy 2-liniowe symetryczne (V, ϕ) i (W, ψ). Przekształcenie $f : V \to W$ zachowuje formę, jeśli dla $v, w \in V$ mamy $\phi(v, w) = \psi(f(v), f(w))$. Macierzowo, jeśli $B = M(f)$ jest macierzą f (w pewnych bazach), to $B^T M(\psi)B = M(\phi)$.

4.5 Jeśli forma ϕ jest niezdegenerowana, to ϕ jest monomorfizmem. Jeśli $\dim V = \dim W < \infty$, to ϕ jest izomorfizmem.

4.6 Załóżmy, że ϕ jest niezdegenerowana, $\dim V < \infty$. Zbiór $G = \{f \in End(V) \ : \ f \text{ zachowuje } \phi\}$ jest grupą.
Macierzowo: $G = \{B \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ B^T M(\phi)B = M(\phi)\}$.
Każdy element G spełnia $\det B = \pm 1$.

4.7 Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz ϕ jest typu $(V, \phi) \simeq [1]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1]^\ell$, to grupę przekształaceń zachowujących ϕ oznaczamy $O(k, \ell)$.

4.8 Szczególne przypadki (tu utożsamiamy przekształcenia z macierzami):
– $O(n,0) = O(n) = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ X^T X = I\}$ grupa ortogonalna. Tu $X^{-1} = X$.
– $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$, gdzie $SL_n(\mathbb{K}) = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ \det X = 1\}$.
– $SO(k,\ell) = O(k,\ell) \cap SL_n(\mathbb{R})$,
– będziemy rozważać $SO(1,3)$, ma ona 2 składowe[1]. Składowa identyczności to grupa Lorentza $L = \{f \in SO(1,3) \ : \ f(C^+) = C^+\}$, gdzie $C^+ = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ \phi(x,x) > 0, \ x_1 > 0\ \}$ jest stożkiem dodatnim.

4.9 Izometryczne przekształcenie przestrzeni nierównych lub nieskończonych wymiarów nie musi być izomorfizmem. Istnieje wiele przykładów przekształceń izometrycznych przestrzeni Hilberta

$$\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\},$$

które nie są izomorfizmami.

Kwadryki [Kos roz.5 §2-4, *tam jest bardzo dokładnie*]

4.10 Zbiory algebraiczne w $\mathbb{K}^n$ to zbiory opisane układami równań wielomianowych.

4.11 Przykąd: okrąg, hiperbola, parabola w $\mathbb{R}^2$.

4.12 Kwadryki afiniczne: Każda kwadryka afiniczna w $\mathbb{R}^n$ może być przekształceniem afinicznym sprowadzona do kwadryki opisanej równaniem:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = \delta$$

$k+\ell \le n$, $\delta = 0$ lub 1 albo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = x_{k+\ell+1}$$

$k+\ell < n$.

4.13 Afiniczne typy równoważności kwadryk w $\mathbb{R}^3$ i rzutowe typy. Zakładając, że po ujednorodnieniu otrzymujemy formę niezdegenierowaną mamy następujące typy:
- elipsoida (sfera) $x^2+y^2+z^2 = 1$, typ rzutowy $+++-$
- hiperboloida jednopowłokowa $x^2+y^2-z^2 = 1$, typ rzutowy $++--$
- hiperboloida dwupowłokowa $x^2+y^2-z^2 = -1$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida eliptyczna $x^2+y^2 = z$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida hiperboliczna $x^2-y^2 = z$, typ rzutowy $++--$
- zbiór pusty $x^2+y^2+z^2 = -1$, typ rzutowy $++++$

4.14 Po ujednorodnieniu zdegenerowana forma:
- $x^2+y^2+z^2 = 0$ „gruby punkt”, typ rzutowy +++0
- $x^2+y^2-z^2 = 0$ stożek, typ rzutowy ++-0
- itd itp

[1] Chodzi o składowe spójności, lub co na jedno wychodzi składowe łukowej spójności, które będą zdefiniowane na topologii.