# GAL z ★ 2017

http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/

Wersja 2.6.2017

## 1 Przestrzenie rzutowe

Patrz osobny plik
http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/Przestrzenie_rzutowe-zadania.pdf .
Do zrobienia na ćwiczeniach: zadania 53.3, 53.4, 53.14, 53.16.

## 2 Formy dwuliniowe

**2.1.** Wyznaczyć macierz formy dwuliniowej na $\mathbb{R}^3$ w bazie $e'_i$ gdy dana jest macierz w bazie standardowej

a) $\begin{bmatrix} 1,2,3 \\ 3,1,4 \\ 5,1,6 \end{bmatrix}$ $e'_1 = e_1 + e_2,\ e'_2 = e_1 - e_2,\ e'_3 = 2e_1 + e_2 + e_3.$

b) $\begin{bmatrix} 1,2,2 \\ 2,5,6 \\ 2,6,9 \end{bmatrix}$ $e'_1 = e_1 - e_2,\ e'_2 = e_1 + 2e_2,\ e'_3 = e_1 + e_2 - e_3.$

**Definicja** *Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy całkowicie zdegenerowaną (ze względu na formę symetryczną $\phi$), jeżeli $\phi_{|W \times W}$ jest formą zerową.*

*Wektor $v$ nazywa się izotropowy (ze względu na formę symetryczną $\phi$) gdy $\phi(v, v) = 0$.*

**2.2.** W przestrzeni $W$ macierzy $2 \times 2$ o współczynnikach rzeczywistych rozpatrujemy formę dwuliniową $\phi(A, B) = tr(AB)$. Sprawdzić, czy ta forma zadaje izomorfizm $W$ z $W^*$. Znaleźć $W^\perp$ i stożek wektorów izotropowych. Znaleźć największy wymiar podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

**Definicja** *Przetrzeń ortogonalna $(V, \phi)$ to przestrzeń liniowa $V$ wraz z ustaloną symetryczną formą dwuliniową $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$.*

**Definicja** *Przestrzeń ortogonalna z iloczynem zadanym w pewnej bazie przez macierz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*nazywa się płaszczyzną hiperboliczną.*

**2.3.** Udowodnić, że płaszczyzna hiperboliczna zawiera wektor $\alpha$, taki że $\mathrm{lin}\{\alpha\}^\perp = \mathrm{lin}\{\alpha\}$.

**2.4.** Dla niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej $(V, \phi)$ nad ciałem charakterystyki różnej od 2 następujące warunki są równoważne:

a) $(V, \phi)$ jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych

b) istnieje podprzestrzeń $W \subset V$, taka, że $W^\perp = W$

c) w pewnej bazie macierz $\phi$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $I$ jest macierzą identyczności

d) $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie $W_1$ i $W_2$ są całkowicie zdegenerowane.

**2.5.** Rozpatrując przestrzeń ortogonalną nad $\mathbb{R}$ o macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wykazać, że płaszczyzny hiperboliczne o których mowa w a) zadaniu powyszym nie są wyznaczone jednoznacznie.
W powyższym zadaniu b) przestrzeń $W$ nie jest wyznaczona jednoznacznie.

**2.6.** Niech $(V, \phi)$ będzie rzeczywistą przestrzenią dwuliniową wymiaru $2n$. Niech $V$ będzie sumą ortogonalną $n$-wymiarowych podprzestrzeni $V_+$ i $V_-$ takich, że $\phi$ jest dodatnio określona na $V_+$ i ujemnie określona na $V_-$. Udowodnić, że:

a) Każda podprzestrzeń $(V, \phi)$ całkowicie zdegenerowana ma wymiar nie większy niż $n$;

b) Istnieje podprzestrzeń $(V, \phi)$ całkowicie zdegenerowana wymiaru $n$;

c) Każda podprzestrzeń całkowicie zdegenerowana jest zawarta w $n$ wymiarowej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

**2.7.** W przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^4, \phi)$, gdzie $\phi$ w bazie standardowej jest zadane przez macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) znaleźć bazę prostopadłą tej przestrzeni ortogonalnej.

b) znaleźć $W^\perp$, gdzie $W$ jest podprzestrzenią zadaną przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_2 \quad &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Czy $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$? Czy $(W, \phi_{|W \times W})$ jest przestrzenią ortogonalną niezdegenerowaną?

c) znaleźć stożek wektorów izotropowych.

**2.8.** Dana jest przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^3, \phi)$, gdzie $\phi$ w bazie standardowej jest zadane przez macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) dla jakich wartości parametru $a$, $\phi$ jest dodatnio określona?

b) dla $a = 2$ zastosować ortogonalizację Gramma Schmidta i znaleźć bazę ortonormalną $(\mathbb{R}^3, \phi)$.

**2.9.** Niech $(V, \phi)$ będzie niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną, niech $\phi\colon V \longrightarrow V^*$ będzie izomorfizmem wyznaczonym przez $\phi$. Pokazać, że jeśli $\alpha_1, .., \alpha_n$ jest bazą $V$, taką że $\alpha_1, .., \alpha_k$ jest bazą $W \subseteq V$, to $\phi^{-1}(\alpha^*_{k+1}), .., \phi^{-1}(\alpha^*_n)$ jest bazą $W^\perp$.

**2.10.** Udowodnić twierdzenie Witta: Niech $V$ będzie niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną, a $U, W \subset V$ jej podprzestrzeniami. Wówczas dla dowolnego izomorfizmu ortogonalnego $f : U \to W$ istnieje izomorfizm ortogonalny $f' : V \to V$, taki że $f'_{|U} = f$.

## 3 Formy kwadratowe, kwadryki afinicznie

**3.1.** Znaleźć takie współrzędne $\mathbb{R}^2$, że forma $x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ ma postać $-4u_1u_2$.

**3.2.** Znaleźć przekształcenie liniowe, które formę rzeczywistą sprowadza do postaci kanonicznej:

a) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

b) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

**3.3.** Opisać typ kwadryki i znaleźć jej środek symetrii (jeśli istnieje)
$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 = 0$

**3.4.** Znaleźć rodziny prostych pokrywające powierzchnię
a) hiperboloida jednopowlokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
b) paraboloida hiperboloczna $x^2 - y^2 = 2z$.

## Zadania do domu pisemnie na 4.05

Zadania: **2.7, 3.2**

**D1**. Dana jest przestrzeń liniowa z dwuliniową formą symetryczną $(V, \phi)$ , $W \subset V$. Pokazać, że

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(V^{\perp} \cap W)\,.$$

**Definicja** *Forma $(V, \phi)$ nad $\mathbb{Z}_2$ nazywa się parzysta, jeżeli dla każdego $v \in V$, $\phi(v, v) = 0$, a nieparzysta wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $v$, dla którego $\phi(v, v) = 1$.*

**D2** Rozważamy formy symetryczne nad $\mathbb{Z}_2$. Niech $\mathbb{1} = (\mathbb{Z}_2, \xi)$ oznacza formę jednowymiarową nad $\mathbb{Z}_2$, $\xi(x, y) = xy$. Niech $H = (\mathbb{Z}_2^2, \eta)$ oznacza płaszczyznę hiperboliczną.

a) Pokazać, że $\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{1}$ jest izomorficzna z $\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} H$.

b) Pokazać, że każda forma jest sumą ortogonalną $\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} V$, gdzie $V$ jest formą parzystą. Pokazać, że $V$ jest sumą prostopadłą płaszczyzn hiperbolicznych i formy zerowej. Wynika z tego, że każda forma nad $\mathbb{Z}_2$ jest izometryczna z jedna z: $H^m \overset{\perp}{\oplus} 0^n$, $\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} H^n \overset{\perp}{\oplus} 0^n$, $\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} H^m \overset{\perp}{\oplus} 0^n$. Pokazać, że żadane dwie z powyższych nie są izometryczne.

## 4 Przekształcenia zachowujące formę dwuliniową

**4.1.** Niech $(V, \phi)$ będzie przestrzenią ortogonalną, Niech $V = W \oplus W^{\perp}$. Pokazać, że symetria względem $W$ wzdłuż $W^{\perp}$ jest przekształceniem ortogonalnym.

**4.2.** Pokazać, że każde przekształcenie ortogonalne niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej jest izomorfizmem liniowym.

**4.3.** Pokazać, że jeżeli $(V, \phi)$ przestrzenią ortogonalną, oraz $\phi(\alpha, \alpha) = \phi(\beta, \beta) \neq 0$, to istnieje symetria ortogonalna $f\colon V \longrightarrow V$, taka że $f(\alpha) = \beta$.

**4.4.** Pokazać, że każde przekształcenie ortogonalne niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej jest izomorfizmem liniowym.

**4.5.** Pokazać, że każde przekształcenie ortogonalne niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej wymiaru $n$ jest złożeniem co najwyżej $n$ symetrii prostopadłych.

**4.6.** Pokazać, że dla przekształcenia ortogonalnego niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej, jeśli $W$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $W^{\perp}$ jest także podprzestrzenią niezmienniczą.

**4.7.** Niech $(V, \phi)$ będzie przestrzenią ortogonalną, Pokazać,że jeżeli $V = V^{\perp} \oplus W$, to rzut ortogonalny na $W$ jest przekształceniem ortogonalnym. Pokazać, że jeżeli $V = W \oplus W^{\perp}$ i rzut ortogonalny na podprzestrzeń $W$ jest przekształceniem ortogonalnym, to $W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.

## 5 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

**5.1.** Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie $k$ wymiarową podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech $A, B \in M_{(n\times k}(\mathbb{R})$ bedą macierzami, których kolumny są ortonormalnym bazami $W$. Pokazać, że $AA^T = BB^T$.

**5.2.** Zastosować metodę ortogonalizacji Gramma-Schmidta do bazy $1, X, X^2, .., X^n$ w przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$.

**5.3.** Rozpatrujemy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Zastosować metodę ortonormalizacji Gramma-Schmidta, aby otrzymać ortonormalną bazę podprzestrzeni $\text{lin}\{(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)\}$.

**5.4.** Pokazać, że jeśli w liniowej przestrzeni euklidesowej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą ortonormalną zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest układem wektorów takim, że $\sum_{i=1}^{i=n} \|\beta_i\|^2 < 1$, to układ $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ jest liniowo niezależny.

**5.5.** a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A, B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej antysymetrycznych macierzy $n \times n$.
b) Niech $C \in O(n)$. Wykazać, że jeśli $A$ jest macierzą antysymetryczną, to $CAC^{-1}$ też jest macierzą antysymetryczną. Ponadto $A \mapsto CAC^{-1}$ jest izometrią przestrzeni macierzy antysymetrycznych ze względu na formę $\phi$.

**5.6.** W przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle A, B\rangle = Tr(AB^T)$ znaleźć, podając jej bazę lub opisujący ją układ równań, podprzestrzeń prostopadłą do podprzestrzeni złożonej z macierzy o śladzie równym 0.

**5.7.** Pokazać, że wyznacznik Gramma spełnia nierówność:

$$G(\alpha_1, .., \alpha_2, \beta_1, .., \beta_l) \leq G(\alpha_1, .., \alpha_k)G(\beta_1, .., \beta_l)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ dla dowolnych $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ lub conajmniej jeden z układów $\alpha_1, .., \alpha_k$, $\beta_1, .., \beta_l$ jest liniowo zależny.

## 6 Izometrie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym

**6.1.** Udowodnić, że przekształcenie ortogonalne płaszczyzny euklidesowej jeśli zachowuje orientację, to jest obrotem, a jeśli ją zmienia to jest symetrią względem prostej.

**6.2.** Przekształcenie przestrzeni euklidesowej zadane jest, w kanonicznej bazie ortonormalnej $e_1, e_2, e_3$ macierzą:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przedstawić to przekształcenie w postaci złożenia co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem płaszczyzn.

**6.3.** Udowodnić, że złożenie dowolnej liczby obrotów przestrzeni liniowej euklidesowej trójwymiarowej jest obrotem.

**6.4.** Rozpatrujemy $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć macierz w bazie standardowej i wzór analityczny opisujący rzut prostopadły na podprzestrzeń $W = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$.

**6.5.** Przekształcenie ortogonalne $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ przestrzeni euklidesowej ze standardowym iloczynem skalarnym ma w standardowej bazie ortonormalnej macierz:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę ortonormalną, w której przekształcenie $f$ ma formę kanoniczną. Znaleźć tę formę.

---

**Zadania domowe na 15 maja 2017**

**6.6.** Znalezć warunki konieczne i dostateczne na to, by by zbiór liczb dodatnich $\{a_{ij} : 0 \geq j \geq n, i > j\}$ był

a) zbiorem odległości wszystkich możliwych par wierzchołków $n$ wymiarowego sympleksu w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$,

b) zbiorem odległości wszystkich możliwych par punktów pewnego zbioru $n+1$ punktów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ (to znaczy nie zakładamy tak jak w a), że punkty są w położeniu ogólnym).

**6.7.** Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą ortogonalną i $\det A = 1$. Pokazać, że

1. $(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2 = 2 \operatorname{tr} A$
2. $((\sum_{i=1}^{3} a_{ii}) - 1)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 3}(a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$

**6.8.** Pokazać,że jeżeli $w(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym $n \times n$ macierzy ortogonalnej $A$. Pokazać, że $\lambda^n w(\lambda^{-1}) = \pm w(\lambda)$.

**6.9.** Zadanie 6.5

# 7 Afiniczne przestrzenie euklidesowe

**Definicja** *W afinicznej przestrzeni euklidesowej $(E,\omega)$ odległością punktu $x_0$ od podprzestrzeni afinicznej $H = y_0 + S(H)$ nazywamy minimum długości wektora $\omega(x_0, y)$, gdzie $y \in H$.*

**7.1.** Udowodnić, że odległość punktu $x_0$ od podprzestrzeni afinicznej $H = y_0 + S(H)$ jest równa długości rzutu prostopadłego wektora $\omega(x_0, y_0)$ na $S(H)^{\perp}$.

**7.2.** Udowodnić, że odległość $d(x_0, H)$ punktu $x_0$ od podprzestrzeni afinicznej $H = y_0 + S(H)$, gdzie $S(H) = \operatorname{lin}\{\alpha_1, .., \alpha_k\}$, można wyrazić przy pomocy wyznacznika Gramma $G$:

$$(d(x_0, H))^2 = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k, \omega(x_0, y_0))}{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k)},$$

**7.3.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć (na dwa sposoby) odległość punktu $(4, 2, -5, 1)$ od podprzestrzeni opisanej przez układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

**7.4.** W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć odległość punktu $(2, 4, -4, 2)$ od podprzestrzeni danej przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - \ x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

**7.5.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć miejsce geometryczne punktów, przez które można przeprowadzić prostą prostopadła do płaszczyzn $P_1$ i $P_2$ i mającą z nimi niepuste przecięcie.

$$P_1 : \quad [1, 2, -1m - 9, -13] + \operatorname{lin}\{(2, 3, 7, 10, 13), (3, 5, 11, 16, 21)\}$$

$$P_2 : \quad \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - \ x_4 + \ x_5 &= -22 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - \ x_4 - 3x_5 &= -4 \\ 9x_1 + 3x_2 + \ x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= -138 \end{aligned}$$

Znaleźć odległość $P_1$ od $P_2$. podpprzestrzeń wymiaru $\dim S(P_1) \cap S(P_2)$

**7.6.** W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ dane są proste $L = \{[0,7,1,2] + t(0,1,-1,0)\}$ oraz $K = \{[1,1,1,1] + t(1,0,0,-1)\}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4,1,3,1]$, która jest prostopadła do $L$ i nie przecina $K$.

**7.7.** Niech $H$ i $K$ bedą podprzestrzeniami euklidesowej przestrzeni afinicznej $E$ i niech $H \cap K = \emptyset$. Pokazać,że istnieje prosta $L$ taka, że $L \perp H$, $L \perp K$, i $L$ ma punkty wspólne z $H$ i z $K$.

# 8 Przekształcenia afiniczne przestrzeni euklidesowej

**8.1.** Pokazać, że jeżeli przekształcenie ortogonalne afinicznej przestrzeni euklidesowej ma dwie niezmiennicze podprzestrzenie afiniczne skośne, to ma punkt stały.

**8.2.** Znaleźć wzór na symetrię prostokątną euklidesowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym względem $lin\{\beta_1, \beta_2\}$, gdzie $\beta_1 = [1,1,-1,-2]$, $\beta_2 = [5,8,-2,-3]$.

**8.3.** Niech w przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym hiperpłaszczyzny $P$ i $Q$ będą dane równaniami: $P = \{x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6\}$, $Q = \{x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Znaleźć równania opisujące obraz płaszczyzny $Q$ przy
a) rzucie prostopadłym na płaszczyznę $P$.
b) symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $P$.

# 9 Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

**9.1.** Znaleźć oś symetrii paraboli $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + y = 8$.

**9.2.** Dany jest stożek $x^2 + y^2 = z^2$. Opisać wszystkie możliwe przekroje stożka płaszczyzną.

**9.3.** Znaleźć osie kwadryki $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$.

---

**Do domu na 29 maja:** Proszę zrobić zadania 7.7, 8.3, 9.3 oraz:

**9.4.** Dane sa symetryczne macierze rzeczywiste $A$ i $B$. Załóżmy, że $A$, $B$ oraz $A - B$ są dodatnio określone. Udowodnić, że jeśli $AB = BA$ to $det(A) > det(B)$. Czy założenie $AB = BA$ jest konieczne?

# 10 Przekształcenia samosprzężone

*Zadania mające na celu lepsze wyjaśnienie definicji*

**10.0a** Niech $\phi$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni skończonego wymiaru. Oznaczmy przez $\tilde{\phi} : V \to V^*$ izomorfizm zadany przez $\phi$:

$$\alpha \mapsto (\alpha, -)\,.$$

Niech $f : V \to V$ dowolnym przekształceniem liniowym przestrzeni euklidesowej $V$. Niech $f^* : V^* \to V^*$ będzie przekształceniem sprzężonym (w sensie I semestru GALu). Niech $f^\sharp = \tilde{\phi}^{-1} \circ f^* \circ \tilde{\phi}$. Pokazać, że $f^\sharp$ jest przekształceniem sprzężonym do $f$ w sensie iloczynu skalarnego, tzn

$$\forall \alpha,\, \beta \in V \quad (f(\alpha), \beta) = (\alpha, f^\sharp(\beta))\,.$$

Jak to jest z przestrzeniami zespolonymi z iloczynem hermitowskim?

**10.0b** Pokazać, że jeżeli $\varphi \in End(V)$ jest dodatnio określony, to $\varphi$ jest automorfizmem i $\mu(\alpha, \beta) = \phi(\varphi(\alpha), \beta)$ jest iloczynem skalarnym. Pokazać, że jeżeli $\mu$ jest iloczynem skalarnym na $V$, to istnieje dodatnio określony automorfizm $\varphi$, dla którego $\mu(\alpha, \beta) = \phi(\varphi(\alpha), \beta)$.

**Definicja:** *Niech $(V, \phi)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym. Powiemy, że $\varphi \in End(V)$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy jest samosprzężony względem $\phi$ oraz dla każdego $0 \neq \alpha \in V$, $\phi(\varphi(\alpha), \alpha) > 0$.*

Pokazać, że $\varphi \in End(V)$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje automorfizm $\psi \in Aut(V)$, taki że $\varphi = \psi^*\psi$, gdzie $\psi^*(\alpha)$ jest automorfizmem spełniajacym warunek $\phi(\psi(\alpha), \beta) = \phi(\alpha, \psi^*(\beta))$.

**10.0c** Niech $(V, \phi)$ będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym/hermitowskim, zadanym w pewnej bazie $\alpha_1, .., \alpha_n$ przez macierz $U$. Niech $\phi \colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, które w bazie $\alpha_1, .., \alpha_n$ ma macierz $A$. Znaleźć macierz przekształcenia sprzężonego.

*Właściwe zadania*

**10.1.** Niech $\phi$ będzie przekształceniem samosprzężonym. Wykazać, że $ker\, \phi \perp im\, \phi$ oraz $ker\, \phi$ i $im\, \phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

**10.2.** W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ iloczyn skalarny w bazie standardowej jest zadany przez macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spawdzić czy czy przekształcenie $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 - x_3)$ jest samosprzężone.

**10.3.** Niech przekształcenie samosprzężone $\phi$ przestrzeni euklidesowej będzie dane w pewnej bazie ortonormalnej przez macierz $A$. Znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych $\phi$ oraz macierz $\phi$ w tej bazie. (Uwaga: Sformułowanie to jest równoważne sformułowaniu: znaleźć macierz ortogonalną $B$ taką, że $B^T AB$ jest macierzą diagonalną. Baza, lub równoważnie macierz $B$, nie musi być wyznaczona jednoznacznie).

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**10.4.** Niech $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem przestrzeni euklidesowej, takim że $f$ jest samosprzężone i ortogonalne. Pokazać, że $f$ jest symetrią względem pewnej podprzestrzeni wzdłuż podprzestrzeni do niej prostopadłej.

**10.5.** !!! Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów $k$-wymiarowych. Pokazać, że $A$ jest izometrią.

**10.6.** Niech $\varphi$ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że

a) funkcja $f(x) = (\varphi(\alpha), \alpha)$ osiąga minimum na sferze jednostkowej

b) jeżeli $\lambda_1$ jest minimum funkcji $f$ na sferze jednostkowej przyjmowanym w punkcie $\alpha_1$, to $\alpha_1$ jest wektorem własnym o wartości własnej $\lambda_1$.

c) pokazać, że przestrzeń $lin\{\alpha_1\}^\perp$ jest $\varphi$ niezmiennicza i opisana w punkcie b) procedura stosowana indukcyjnie prowadzi do znalezienia ciągu rosnącego wartości własnych $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ i odpowiadających im wektorów własnych.

**10.7.** Operator $A \in End(\mathbb{C}^2)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 4 + 2i & 5 + 4i \\ 4 + 3i & 2 \end{pmatrix}$$

Przedstawić $A$ jako złożenie $BP$ operatora samospreżonego dodatnio-określonego $P$ i unitarnego $B$. (To jest zadanie na rozkład biegunowy.)

**10.8.** Udowodnić, że przekształcenia samosprzężone $\phi$ i $\psi$ przestrzeni euklidesowej są przemienne (tzn. $\phi\psi = \psi\phi$) wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają wspólną ortonormalną bazę wektorów własnych.

**10.9.** Znaleźć wspólną bazę ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$) złożoną z wektorów własnych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**10.10.** Niech $\varphi$ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej takim, że $(\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że:
a) jeżeli dla pewnego wektora $\alpha_0$, $(\varphi(\alpha_0), \alpha_0) = 0$, to $\varphi(\alpha_0) = 0$;
b) jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i dowolnego $\beta$, $(\varphi(\alpha_0 + t\beta), \alpha_0 + t\beta) \geq 0$, to $(\varphi(\alpha_0), \beta) = 0$.

---

**DO DOMU NA 5 CZERWCA pisemnie**

**10.11.** Zadanie 10.3.a

**10.12.** Jeśli $A$ jest operatorem samosprzężony, to $\exp(iA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!}$ jest unitarny. Jeśli $B$ jest unitarny, to istnieje samosprzężony $A$, taki, że $B = \exp(iA)$.

**10.13.** Niech $A \in U(n)$. Wykazać, dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieje wielomian $f$ (być może zależny od $A$) taki, że $(f(A))^k = A$.

**10.14.** Znałeźć rozkład biegunowy macierzy $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

**10.15.** Niech $A$ będzie operatorem dodatnio określonym, a $B$ operatorem półdodatnio określonym. Udowodnić że wartości własne AB są rzeczywiste. (Uwaga: nie zakładamy, że $AB = BA$.)

## 11 Kwaterniony

**11.1.** Udowodnić, że jeśli $a$ i $b$ są liczbami całkowitymi będącymi sumami czterech kwadratów liczb całkowitych, to iloczyn $ab$ też jest sumą czterech kwadratów.

**11.2.** Udowodnić, że wszystkie elementy $h \in \mathbb{H}$ speniające $h^2 = -1$ są sprzężone, tzn jeśli $g^2 = h^2 = -1$, to istnieje element $k \in \mathbb{H}$, taki, że $khk^{-1} = g$.

**11.3.** Opisać wszystkie sposoby na jakie można zanurzyć $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ z zachowaniem działań?

**11.4.** Utożsamiając kwaterniony z macierzami wykazać, że iloczyn skalarny w kwaternionach jest równy $(x, y) = Tr(xy^*)$.
(a) $c \mapsto \infty$ oraz $\infty \mapsto c$,
(b) $x$ i $\mu = (x)$ leżą na promieniu wychodzącym z $c$,
(c) $||x - c||\,||\mu(x) - c|| = r^2$. )
Korzystając z identyfikacji $\mathbb{R}^3$ z $im(\mathbb{H})$ przedstawić odbicia wzgłedem płaszczyzn i inwersje wzglądem sfer za pmomocć mnożenia kwaternionowego.

**11.5.** Wykazać, że odwzorowanie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+(1,3)$ opisane w notatkach do wykładu (9.6) jest „na".
Wsk: Wykazać, że każdy elemen $SO^+(1,3)$ można predstawić jako $ABC$, gdize $A, C \in SU(2)$, $B \in SO^+(1,1)$.