GAL z ★ 2017

http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal2017gw/

Wersja 7.4.2017

Zadania zrobione w grupie 1 są oznaczone przez ♠ .
Zadania polecane w grupie 1 są oznaczone przez ♡ .

Zadania zadane pisemnie do domu (w obu grupach) są oznaczone przez .

1 Zadania kategoryjne

1.1. Kategoryjna definijcja produktu: Jeśli V wraz z przekształceniami π_1, π_2 spełnia warunek *dla dowolnej przestrzeni* U *oraz przekształceń* ϕ_i, ϕ_j *istnieje dok:ladnie jedno przekształcenie* ψ*, takie, że* $\phi_i = \pi_i\psi$ *dla* $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ V_1 & & V_2 \\ & Z \arrow[ul, "\forall\phi_1"] \arrow[ur, "\forall\phi_2"'] \arrow[uu, dotted, "\exists!\,\phi"'] & \end{tikzcd}$$

wtedy $V \simeq V_1 \times V_2$.

1.2. Definicję (zewnętrznej) sumy prostej (koproduktu):

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\phi"] & \\ V_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\forall\phi_1"'] & & V_2 \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\forall\phi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Pokazać, że w świecie przestrzeni liniowych zewnetrzna suma prosta jest izomorficzna z $V_1 \times V_2$, ale tak nie jest w świecie zbiorów.

1.3. Dane obiekty A_i dla $i \in I$.

• Obiekt S wraz z odwzorowaniami $\iota_i : A_i \to S$ nazywamy koproduktem rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : A_i \to C$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : S \to C$ taki, że $f_i = f\iota_i$ dla każdego $i \in I$.

• Obiekt P wraz z odwzorowaniami $\pi_i : P \to A_i$ nazywamy produktem rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : C \to A_i$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : C \to P$ taki, że $f_i = \pi_i f$ dla każdego $i \in I$.

a) Wykazać, że produkty i koprodukty skończonych rodzin są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

b) Wykazać, że produkty i koprodukty nieskończonych rodzin naogól nie są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

c) Jak to jest w kategorii zbiorów.

1.4. Rozważamy kategrię zbiorów lub kategorię przestrzeni liniowych.
Niech $\phi_1, \phi_2 : V \to W$ będą morfizmami. Kojądro różnicowe $coeq(\phi_1, \phi_2)$ definiujemy jako przeksztacenie $\pi : W \to Q$, takie, że $\pi\phi_1 = \pi\phi_2$, które jest uniwersalnym przekształceniem o tej własności, tzn dla dowolnego przekształcenia $\tau : W \to Z$ takiego, że $\tau\phi_1 = \tau\phi_2$ istnieje odwzorowanie $\widetilde{\tau} : Q \to Z$ spełniające $\tau = \widetilde{\tau}\pi$. Wykazać, że kojądro różnicowe dowolnych dwóch morfizmów istnieje.

2 Wyznaczniki

2.1. Niech macierz A będzie kwadratową macierzą antysymetryczną, tzn $A^T = -A$. Wykazać, że $det(A)$ jest kwadratem.

Dokładniej: niech $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,n}$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Wykazać, że istnieje wielomian $P(\underline{a})$ zależny od zmiennych $\underline{a} = \{a_{i,j} \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}$ taki, że $\det(A) = P(\underline{a})^2$. (Wskazówka: pokazać, że $P(\underline{a})$ jest elementem ciała funkcji wymiernych $\mathbb{K}(\underline{a})$.)

2.2. Liczby Bernouliego dane są wzorem

$$B_n = (-1)^{n+1}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Niech b_i będą współczynnikami rozwinięcia Taylora

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots.$$

Wykazać, że $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2n+1} = 0$ dla $n > 0$, oraz $b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n!)} B_n$.

2.3. Udowodnić

$$B_n = \frac{1}{2}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \ldots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

2.4. Udowodnić

$$B_n = 2^n(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \ldots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

Wsk. Niech $c_n = b_{2n}$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}x + c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6 + \ldots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right) = 1.$$

Przyrównać współczynniki przy potęgach x do 0.

2.5. ♡ Niech $Cl(n)$ będzie zbiorem funkcji wielomianowych na przestrzeni macierzy kwadratowych $n \times n$, które przyjmuja, te same wartości na macierzach podobnych (tzw. funkcje klas). Oznaczmy przez $Sym(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbiór wielomianów symetrycznych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Niech $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza macierz diagonalna, o wyrazach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wykazać, że przekszta lcenie

$$Cl(n) \to Sym(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$f \mapsto f(D(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

jest izomorfizmem.

Wskazówka: Pokazać, że $Sym(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, gdzie
$\sigma_1 = \sum_i x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} x_ix_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k<\ell} x_ix_jx_kx_\ell, \quad \ldots$

3 Endomorfizmy

3.1. ♠ Niech $f, h \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Niech $fh = hf$ Pokazać, że jądro $\ker(f)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu h.

3.2. ♠ Pokazać, że $\ker f^k$ i $\mathrm{im}\, f^k$ są niezmienniczymi podprzestrzeniami dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$.

3.3. Udowodnić, że jeżeli przekształcenie liniowe $f \colon V \longrightarrow V$ przestrzeni liniowej nad K ma $n = \dim V$ różnych wartości własnych i dla $h \colon V \longrightarrow V$ zachodzi $fh = hf$, to istnieje baza V złożona z wektorów własnych h.

3.4. ♠ Wykazać równość wielomianów charakterystycznych $W_{\phi\psi} = W_{\psi\phi}$ dla dowolnych $\phi, \psi \in End(V)$.

3.5. ♠ Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, przy czym rząd $\mathrm{rank}\, C = r$. Pokazać, że jeżeli $A \cdot C = C \cdot B \in M_{n\times m}$, to wielomiany charakterystyczne macierzy A i B maja wspólny dzielnik stopnia r.

3.6. ♠ Niech $U \subseteq V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia liniowego $f : V \to V$. Pokazać, że wielomian charakterystyczny $f_{|_U}$ jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego f. Co wicej $W_f = W_{f_{|_W}} W_{\bar{f}}$, gdzie $\bar{f} : V/U \to V/U$ jest przeksztaceniem przestrzeni ilorazowej.

3.7. ♠ Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem przestrzeni n–wymiarowej. Wyrazić wielomian charakterystyczny $W_{f^{-1}}$ w terminach wielomianu W_f.

3.8. ♠ Znaleźć wielomian charakterystyczny i zbadać diagonalizowalność macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(Taka macierz nazywa się cykliczną.)

3.9. (17.03) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki 0. Pokazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest endomorfizmam i $\mathrm{tr}\, \phi = 0$, to istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz ϕ ma wyłącznie zera na przekątnej.

3.10. ♠ Niech f będzie endomorfizmem $\mathbb{R}^4$, zadanym wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją f niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe $W, Y \subseteq \mathbb{R}^4$, dla których $R^4 = W \oplus Y$?

3.11. ♠ Niech X będzie skończonym niepustym zbiorem, a $A \subseteq X$ ustalonym podzbiorem. Zbiór $\mathcal{P}(X) = \mathbb{Z}_2^X$ wszystkich podzbiorow jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$. Niech $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ będzie endomorfizmem $f(Y) = A \cap Y$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne. Czy endomorfizm f jest diagonalizowalny?

3.12. Niech V będzie przestrzenią przestrzenią linową wielomianów o współczynnikach w ciele K. Niech $\phi\colon V \longrightarrow V$ będzie różniczkowaniem. Dla przekształcenia ϕ znaleźć:
a) podprzestrzenie niezmiennicze
b) wartości własne
c) wektory własne

3.13. (17.03) Niech endomorfizm $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie dany wzorem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

. Wykazać, że f jest diagonalizowalny i znaleźć bazę złożoną z wektorów własnych.

3.14. (17.03) Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ takim, że $\phi^n = id$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to ϕ jest przekształceniem diagonalizowalnym. Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych? Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym?

3.15. ♠ Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ będą przekształceniami liniowymi, które w bazach standardowych mają macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadać, czy istnieją bazy $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{C}^3$ odpowiednio, w których przekształcenia f i g mają macierz diagonalną.

3.16. Zbadać diagonalizowalność (nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Rozkład Jordana

(Trochę zadań rachunkowych, ☹.)

4.1. ♠ Znaleźć bazy w $\mathbb{C}^n$ w których przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ma formę Jordana (i wskazać tę formę) jeżeli w bazie standardowej $e_1, ..e_n$ przekształcenie ma macierz:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2. Niech $f\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, które w pewnej bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ma macierz:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a)♠ Znaleźć bazę, w której macierz ta ma formę Jordana.
b) Znaleźć wszystkie podprzestrzenie $W \subseteq V$ niezmiennicze względem f.

4.3. $\spadesuit$ Macierze A i B poniżej, mają taki sam wielomian charakterystyczny. Ustalić, czy są podobne znajdując postać Jordana dla każdej z nich.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.4. Obliczyć A^{2013}, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ lub $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Wynik podać w postaci $C\,D\,C^{-1}$

4.5. Znaleźć formę Jordana macierzy nad $\mathbb{C}$:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & ... & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad c)\spadesuit \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

4.6. Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

4.7. (17.03) Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

4.8. $\spadesuit$ Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

4.9. Korzystając z formy Jordana, pokazać, że każda macierz nad $\mathbb{C}$ jest produktem dwóch macierzy symetrycznych.

4.10. $\spadesuit$ Niech $f : V \to V$ i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią cykliczną. Czy zawsze istnieje $U \subset V$ niezmiennicza, taka że $W \oplus U = V$?

4.11. $\spadesuit$ Niech $f \colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$. Pokazać, że istnieją niezmiennicze podprzestrzenie W i U, takie że $f_{|W} : W \to W$ jest przekształceniem nilpotentnym, a $f_{|U} : U \to U$ izomorfizmem, $V = U \oplus W$. Pokazać, że przestrzenie W i U są wyznaczone jednoznacznie.

4.12. (24.03) Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem, którego macierz Jordana składa się z klatek odpowiadającym różnym wartościom własnym. Pokazać, że istnieje baza, w której macierz tego przekształcenia jest cykliczna, tzn jak w zad. 3.8.

4.13. ♠ Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Pokazać, że każda macierz jest podobna do swojej transponowanej.

4.14. Pokazać, że jeżeli jedyną wartością własną macierzy A nad $\mathbb{C}$ jest 1, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ macierz A^k jest podobna do macierzy A.

4.15. Wielomian charakterystyczny macierzy A nad $\mathbb{R}$ jest równy $(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^2$, $\dim\ker(A - 5I) = 2$, $\dim\ker(A - 5I)^2 = 4$, $\ker(A - I) \cap im(A - I) \neq \{0\}$. Znaleźć formę Jordana. Uzasadnić starannie odpowiedź.

4.16. ♠ Rozpatrzmy endomorfizm $\phi : V \to V$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(a) Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią ϕ – niezmienniczą i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu ϕ o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla $i = 1, ..., k$.

(b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa i K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to: endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny $\iff$ $(*)$ dla każdej podprzestrzeni ϕ -niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń ϕ –niezmiennicza $W' \subset V$ taka, że $V = W \oplus W'$.

4.17. (24.03) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że char $\mathbb{K} = 0$ lub char $\mathbb{K} > \dim V$. Dany operator A działający na V. Pokazać, że jeśli $tr(A^k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots \dim V$, to A jest nilpotentny.

4.18. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^2 = -Id$. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 2.

4.19. ♠ Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{Q}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^5 = Id$. Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 4.

Pisemna praca domowa na 24.03:

1) Zadanie 4.12. (Wskazówka: Udowodnić, że jeśli endomorfizmy

$$Id,\ \phi,\ \phi^2,\ \ldots,\ \phi^{n-1}$$

działające na n-wymiarowej przestrzeni V są liniowo niezależne, to V jest cykliczna.)

2) Zadanie 4.17.

3) Znaleźć wielomian minimalny macierzy A oraz podać przykład wielomianu $p \in \mathbb{K}[t]$ takiego, że $p(A)$ jest macierzą diagonalizowalną, a $A - p(A)$ jest macierzą nilpotentną, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Niech V, $\dim V > 1$, będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, dla której określone jest działanie mnożenia $\bullet : V \times V \to V$, które wraz z dodawaniem wektorów spełnia aksjomaty ciała z wyjątkiem aksjomatu przemienności mnożenia. Wykazać, że $\dim V$ jest parzysty.

5 Przestrzenie afiniczne

Kilka zadań rachunkowych

5.1. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{C}^3$ znaleźć współrzędne barycentryczne punktu $(1, 0, i)$ w układzie punktów $(1, 0, 1), (2, i, 1), (1 + i, 0, 2), (1, i, 1)$.

5.2. ♠ Czy punkty są w położeniu szczególnym tzn czy są afinicznie zależne
a) $[1,1,1]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$;
b) $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$;
c) $[1,2,1]$, $[3,0,1]$, $[2,2,0]$?
Jeśli tak, to znleźć maksymalne podukłady punktów w położeniu ogólnym.

5.3. ♠ Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni $\mathbb{K}^3$ opisanej równaniem $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$.

5.4. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć przedstawienie parametryczne oraz układ równan opisujący podprzestrzen afiniczną generowaną przez punkty:

a) $\{(-1,1,0,1),(0,0,2,0),(-3,-1,5,4),(2,2,-3,-3)\}$

b) $\{(1,1,1,-1),(0,0,6,-7),(2,3,6,-7),(3,4,1,-1)\}$
Przestrzenie te przedstawić jako przecięcia hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^4$. (Hiperpłaszczyzna = przestrzeń kowymiaru jeden.)

Ciekawsze zadania

Oznaczenie: prostą przechodzącą przez punkty $p.q \in E$ oznaczamy przez $L(p,q)$.

5.5. ♠ Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a $A \subset E$ jej podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnej pary punktów $p, q \in A$ prosta $L(p,q) \subset A$. Czy A jest podprzestrzenią afiniczną?

5.6. ♠ Sformułować i udowodnić twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{K}$.

5.7. ♠ Twierdzenie Menelaosa. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b,c)$, $L(c,a)$ i $L(a,b)$:

$$p = \lambda b + (1-\lambda)c \qquad q = \mu c + (1-\mu)a \qquad r = \nu a + (1-\nu)b$$

dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$. Udowodnić, że p, q, r są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu\nu = (\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)$.

5.8. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b,c)$, $L(c,a)$ i $L(a,b)$:

$$p = \lambda b + (1-\lambda)c\,, \qquad q = \mu c + (1-\mu)a\,, \qquad r = \nu a + (1-\nu)b\,.$$

Załóżmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe. Znaleźć warunek dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ na to, by proste $L(a,p)$, $L(b,q)$ i $L(c,r)$ przecinały się w jednym punkcie. Wsk: Twierdzenie Cevy.

5.9. ♠ Dana jest przestrzeń afiniczna wymiaru n, jej baza punktowa oraz $n+1$ punktów q_i. Niech $a_{i,0}, \ldots, a_{i,n}$ będą współrzednymi barycentrycznymi punktu q_i. Wykazać, że $det(a_{i,j}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy punkty są w położeniu szczególnym.

5.10. ♠ Jeśli $TF_1 \subset TF_2$ (tzn F_1 jest słabo równolełe do F_2), oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

W poniższych zadaniach $< A >= af(A)$ oznacza podprzesstrzeń afiniczną rozpiętą przez zbiór A.

5.11. (31.03) Niech $E_1 = p + V_1$, $E_2 = q + V_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej E. Udowodnić, że:

a) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \iff \omega(p,q) \in V_1 + V_2$

b) jeśli $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ to $\dim < E_1 \cup E_2 >= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$

c) jeśli $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, to $\dim < E_1 \cup E_2 >= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim V_1 \cap V_2 + 1$.

5.12. (31.03) Niech E_1, E_2 będą dwoma podprzestrzeniami afinicznymi w przestrzeni afinicznej E nad ciałem K. Niech $< E_1 \cup E_2 >= E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i niech $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0, 1$ będzie ustalonym elementem. Znaleźć miejsce geometryczne elementów $\lambda x + (1-\lambda)y$, gdzie x i y przebiegają E_1 i E_2 odpowiednio. (Czy to jest podprzestrzeń afiniczna, a jeśli tak, to jak ją opisać?)

5.13. (31.03) Niech $E = p + S(E_1)$, $E_2 = q + S(E_2)$ będą dwiema skośnymi podprzestrze niami w przestrzeni afinicznej E nad dowolnym ciałem (tzn $TE_1 \cap TE_2 = \{0\}$). Pokazać, że dla każdego punktu $x \notin E_1 \cup E_2$ istnieje conajwyżej jedna prosta P przechodząca przez punkt x i przecinająca E_1 i E_2. Wykazać, że prosta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in < E_1 \cup E_2 >$ ale $\omega(p,x) \notin S(E_1) + S(E_2)$ i $\omega(q,x) \notin S(E_1) + S(E_2)$.

5.14. (31.03) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dany jest punkt $c = (4, 5, 2, 7)$ oraz dwie proste:
L przechodząca przez punkty $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (0, -1, 0, 1)$
K przechodząca przez punkty $b_1 = (2, 2, 3, 1)$, $b_2 = (1, 2, 2, -2)$
a) Znaleźć prostą N przechodzącą przez punkt c i przecinającą proste L i K. Znaleźć punkty przecięcia L z N i K z N.
b) Znaleźć prostą K', taką by L i K' były skośne i by nie istniała prosta zawierająca punkt c i przecinająca L i K'.

6 Przekształcenia afiniczne

6.1. $\spadesuit$ Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $F(p_i) = q_i$, gdzie $p_0 = [2, 1]$, $p_1 = [1, 2]$, $p_2 = [1, 1]$
a) $q_0 = [1, 1]$, $q_1 = [1, 2]$, $q_2 = [0, 1]$
b) $q_0 = [4, 1]$, $q_1 = [3, 3]$, $q_2 = [2, 1]$
c) $q_0 = [3, 1]$, $q_1 = [3, 2]$, $q_2 = [2, 1]$.
Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia F. (Punkt $p \in E$ jest stałym dla przekształcenia F gdy $F(p) = p$. Prosta $L \subset E$ jest niezmiennicza ze względu na przekształcenie F gdy $F(L) \subset L$.)

6.2. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie afiniczne $\mathbb{R}^3$ niezmiennicze względem przekształcenia afinicznego, które punkty a_0, a_1, a_2, a_3 przekształca na punkty b_0, b_1, b_2, b_3:

a)

$$\begin{array}{rcl} a_0 &=& [1,1,1] \\ a_1 &=& [2,1,1] \\ a_2 &=& [2,2,1] \\ a_3 &=& [2,2,2] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_0 &=& [5,-3,4] \\ b_1 &=& [8,-5,6] \\ b_2 &=& [9,-5,7] \\ b_3 &=& [9,-5,8] \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} a_0 &=& [2,5,1] \\ a_1 &=& [3,5,1] \\ a_2 &=& [2,6,1] \\ a_3 &=& [2,5,2] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_0 &=& [3,7,3] \\ b_1 &=& [6,11,6] \\ b_2 &=& [5,17,9] \\ b_3 &=& [0,-5,-4] \end{array}$$

6.3. Czy istnieje przekształcenie afiniczne $\mathbb{R}^4$, które punkty a_i przekształca na punkty b_i odpowiednio, zaś prostą P na prostą H. Jeżeli takie przekształcenie istnieje to znaleźć jego postać analityczną i ustalić, czy jest ono wyznaczone jednoznacznie.

a)

$$\begin{array}{rcl} a_0 &=& [1,1,1,1] \\ a_1 &=& [2,3,2,3] \\ a_2 &=& [3,2,3,2] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_0 &=& [-1,1,-1,1] \\ b_1 &=& [0,4,0,4] \\ b_2 &=& [2,2,2,2] \end{array}$$

$P = [1, 2, 2, 2] + t(0, 1, 0, 1)$
$H = [-1, 2, 0, 3] + s(1, -5, 1, -5)$

b)

$$\begin{array}{rcl} a_0 &=& [2,-1,3,-2] \\ a_1 &=& [3,1,6,-1] \\ a_2 &=& [5,1,4,1] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_0 &=& [1,-2,3,5] \\ b_1 &=& [2,1,8,7] \\ b_2 &=& [3,2,10,-6] \end{array}$$

$P = [2, 0, 4, -1] + t(0, 1, 2, 0)$
$H = [1, -1, 5, -2] + s(0, 2, 3, -3)$

6.4. Niech $K, L, M \subset \mathbb{K}^3$ będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą izomorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to orzec, które z trójek są afinicznie równoważne: $(K, L, M) \sim (K', L', M')$ gdy istnieje $\phi \in Aff(\mathbb{K}^3)$ tali, że $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$.

6.5. Niech $\phi : E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeżeli E jest przestrzenią skończenie wymiarową i przekształcenie ϕ ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń ϕ–niezmiennicza zawiera ten punkt stały.

6.6. Niech $\phi\colon E \longrightarrow E$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że 1 nie jest wartością własną $D\phi$. Pokazać, ϕ ma dokładnie jeden punkt stały.

7 Ciąg dalszy

http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal2017gw/gal2017cw2.pdf