GAL*, konspekt wykładów: Przestrzenie afiniczne

4 kwietnia 2017

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie Afiniczne [Kos roz. 4, §1]

1.1 Definicja przestrzeni afinicznej: (E, V, ω), gdzie E zbiór, V przestrzeń liniowa, $\omega : E \times E \to V$ odwzorowanie, które spełnia

1. $\omega(p, q) + \omega(q, r) = \omega(p, r)$

2. $\forall p \in E\ \forall \alpha \in V\ \exists! q \in E\ :\ v = \omega(p, q)$

tzn $\forall p \in E$ odwzorowanie $\omega(p, -) : E \to V$ jest bijekcją.

Przestrzeń V nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez TE.

1.2 Czasami wektor $\omega(p, q)$ jest oznaczany $\overrightarrow{pq}$.

1.3 Operacja $\boldsymbol{+} : E \times V \to E$ zdefiniowana przez warunek $p \boldsymbol{+} \omega(p, q) = q$:

1') $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$ dla $p \in E$, $v, w \in V$

2') $\forall p \in E,\ V \ni v \mapsto p \boldsymbol{+} v \in E$ jest bijekcją.

1.4 Mamy $\omega(p, p) = 0$, $\omega(p, q) = -\omega(q, p)$ oraz $p \boldsymbol{+} 0 = p$ dla $p, q \in E$.

1.5 Kombinacje afiniczne, czyli środki ciężkości (barycentry) $\sum_{i=0}^{k} a_i\, p_i := q \boldsymbol{+} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, \omega(q, p_i)\right)$ dla $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. Niezależność od $q \in E$.

(W dalszej części nie będziemy już używać specjalnego $\boldsymbol{+}$, tylko zwykły $+$.)

1.6 Układy rozpinające, niezależne układy punktów, bazy punktowe.

1.7 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą E wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(p_0, p_1), \omega(p_0, p_2) \ldots, \omega(p_0, p_n)$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą V.

1.8 Wniosek: Trzy warunki równoważne

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest bazą punktową

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to minimalnym układem rozpinającym,

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to maksymalnym układem niezależnym.

1.9 Współrzędne baryczentryczne w bazie punktowej.

1.10 Definicja: Niech $F \subset E$, $W \subset V$, $\omega' = \omega_{|F \times F}$. Trójka (F, W, ω') jest podprzestrzenią (E, V, ω) gdy

– $\forall p, q \in F\ \omega(p.q) \in W$

– $\forall p \in F$ funkcja $\omega(p, \_) : F \to W$, $q \mapsto \omega(p, q)$ jest bijekcją.

1.11 Podzbiór $F \subset E$ jest podprzestrzenią afiniczną (a ściślej: istnieje $W \subset V$ takie, że $(F, W, \omega_{|F\times F})$ jest podprzestrzenią) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest zamknięty ze względu na branie kombinacji afinicznych.

Dow ($\Leftarrow$): Definiujemy $W = \{\omega(p,q) \mid p, q \in F\}$. Sprawdzamy, że W jest podprzestrzenią liniową
– $a\omega(p,q) = \omega(p,q')$ dla $q' = (1-a)p + aq$,
– $\omega(p,q) + \omega(r,s) = \omega(p,q) + \omega(r,p) + \omega(p,s) = \omega(p,q) - \omega(p,r) + \omega(p,s) = \omega(p,q')$
dla $q' = 1\,q + (-1)r + 1\,s$.
Przy okazji zauważamy, że dla ustalonego p przestrzeń $\{\omega(p,q) \mid q \in F\}$ jest równa W. Zatem przekształcenie $F \to W$, $q \mapsto \omega(p,q)$ jest ,,na" i oczywiście jest różnowartościowe.

2 Podprzestrzenie afiniczne, przekształcenia

2.1 Załóżmy $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Zbiór zamknięty ze względu na dwuelementowe kombinacje afiniczne jest podprzestrzenią afiniczną.

2.2 Każda podprzestrzeń $F \subset E$ jest postaci $p + W$, gdzie W jest podprzestrzenią liniową w TE. Przestrzeń liniowa W nie zależy od wyboru $p \in F$.

2.3 Każda podprzestrzeń afiniczna w E jest postaci $p + W$, gdzie $p \in E$, $W \subset V = TE$.

2.4 Parametryczne przedstawienie: np prosta $L(p,q) = \{p + t\omega(p,q) \mid t \in \mathbb{K}\}$.

2.5 Każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{K}^n$ jest opisana niejednorodnym układem równań liniowych.

2.6 Część wspólna rodziny podprzestrzeni jest pusta lub jest podprzestrzenią.

2.7 Istnieje najmniejsza podprzestrzeń $af(A)$ zawierająca dany zbiór A. Składa się ona z kombinacji afinicznych punktów z A.

2.8 Równoloegóść:
F_1 jest słabo równolełe do F_2 gdy $TF_1 \subset TF_2$ (to jest relacja kwaziporządku)
F_1 jest silnie równolełe do F_2 gdy $TF_1 = TF_2$ (to jest relacja równoważności)

2.9 Ćwiczenie: Jeśli F_1 jest słabo równolełe do F_2, oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Przekształcenia afiniczne

2.10 Definicja. Przekształcenie $\phi : E \to F$ jest afiniczne jeśli przeprowadza kombinacje afiniczne na kombinacje afiniczne obrazów.

2.11 Styczne przekształcenie stycznych przestrzeni liniowych $\widetilde{\phi} = D\phi : TE \to TF$.

$$D\phi(v) := \omega(\phi(p), \phi(p+v))$$

(Sprawdzamy, że definicja nie zależy od wyboru $p \in E$, oraz że $D\phi$ jest liniowe. Wsk: $p' + v$ jest kombinacją afiniczną $1p' + 1(p+v) + (-1)p$.)

2.12 Przekształcenie styczne $D\phi$ i wybór $\phi(p) \in F$ dla ustalonego $p \in E$ definiuje przekształcenie afiniczne, tzn jeśli dane jest przekształacenie liniowe $\phi_0 : TE \to TF$ oraz dowolne punkty $p \in E$, $q \in F$, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\phi : E \to F$ takie, że $\phi(p) = q$ oraz $D\phi = \phi_0$.

2.13 Przekształcenie afiniczne jest zadane przez wybór obrazów bazy punktowej.

2.14 We współrzędnych: przekształcenia afiniczne $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ są postaci

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_1, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_2, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_m)\,.$$

gdzie $D\phi = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jest przekształceniem liniowym, $\phi(0, 0, \ldots, 0) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

3 Przekształcenia afiniczne c.d.

3.1 Wybieramy $p \in E$ i $p' \in F$. Wtedy

$$\begin{array}{rcl} \text{przekształcenia afiniczne}(E, F) & \simeq & TF \times L(TE, TF), \\ \phi & \longrightarrow & (\omega(p', \phi(p)), D\phi) \\ \big(\, q \mapsto p' + v + D\phi(\omega(p, q))\,\big) & \longleftarrow & (v, D\phi)\,. \end{array}$$

3.2 Dany wektor $v \in V = TE$. Przez T_v oznaczamy przesunięcie $T_v(p) = p + v$.

3.3 Każde przekształcenie afiniczne $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jest złożeniem przekształcenia liniowego i przesunięcia.

3.4 Przykład symetria afiniczna: Niech $F \subset E$, $TE = TF \oplus V$. Istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne ϕ, które jest stałe na F oraz $D\phi$ jest sym etrią względem TF wzdłóż V.

3.5 Jeśli Df jest izomorfizmem, to f jest izomorfizmem. Każde dwie przestrzenie tego samego wymiaru są izomorficzne. W szczeglnoci jeśli $\dim E = n$, to $E \simeq \mathbb{K}^n$. Izomorfizm zależy od wyboru punktu $p \in E$ i wyboru bazy w TE.

3.6 Przeciwobraz podprzestrzeni afinicznej przy przekształceniu afinicznym jest podprzestrzenią afiniczną. Każda podprzestrzeń w $\mathbb{K}^n$ jest przeciwobrazem 0 przy pewnym przekształceniu afinicznym $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

3.7 Składanie przekształceń. Wybieramy $p \in E$, $q \in F$ oraz w $r \in G$.
Utożsamiamy $E \simeq TE$, $F \simeq TF$ i $G \simeq TG$.

$$TF \times L(TE, TF) \simeq \text{przekształcenia afiniczne}(TE, TF),$$

$$(v, D\phi) = T_v \circ D\phi$$

$$TG \times L(TF, TG) \simeq \text{przekształcenia afiniczne}(TF, TG),$$

$$(w, D\psi) = T_w \circ D\psi$$

$$TG \times L(TE, TG) \simeq \text{przekształcenia afiniczne}(TE, TG),$$

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = T_w \circ D\psi \circ T_v \circ D\phi$$

$$u \mapsto D\phi(u) + v \mapsto D\psi(D\phi(u) + v) + w = D\psi(D\phi(u)) + (D\psi(v) + w).$$

Zatem złożeniu o dpowiada para

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = (w + D\psi(v), D\psi \circ D\phi)$$

3.8 Wniosek: $D(\psi \circ \phi) = D\psi \circ D\phi$

Odsyłacz do grupy przekształceń: Kostrikin Roz 4,§3.

3.9 Grupa izomorfizmów afinicznych $Aff(E)$, $Aff(\mathbb{K}^n) = Aff_n(E)$.
Odwzorowanie $D : Aff(E) \to GL(TE)$ jest homomorfizmem, tzn $D(\phi \circ \psi) = D(\phi) \circ D(\psi)$, $D(Id_E) = Id_{TE}$.

3.10 Odwzorowanie D jest epimorfizmem.

$$ker(D) = \{\phi \in Aff(E) \mid D\phi = Id_{TE}\} = \{T_v \mid v \in TE\}.$$

Mamy ciąg przekształceń

$$\begin{array}{ccccc} TE & \overset{mono}{\hookrightarrow} & Aff(E) & \overset{epi}{\twoheadrightarrow} & GL(TE) \\ v & \overset{i}{\mapsto} & T_v & & \\ & & \phi & \mapsto & D\phi \end{array}$$

Mówimy, że ten ciąg jest dokładny (warunek $im(i) = ker(D)$).

3.11 Istnieje odwzorowanie (homomorfizm) $j : GL(TE) \to Aff(E)$ spełniające $D \circ j = Id_{TE}$. Takie odwzorowanie nazywa się rozszczepieniem. Odwzorowanie

$$TE \times GL(TE) \to Aff(E), \qquad (v, \phi_0) \mapsto (T_v \circ j(\phi_0))$$

jest bijekcją zbiorów, ale działanie w $TE \times GL(TE)$ nie jest zgodne z działaniami składania. To jest tzw produkt półprosty $TE \rtimes GL(TE)$.

3.12 Jeśli utożsamić $Aff(E)$ z $TE \times GL(TE)$ to składanie zadane jest wzorem

$$(w, \psi_0) \circ (v, \phi_0) = (w + \psi_0(v), \psi_0 \circ \phi_0)\,.$$

3.13 Niezmienniki przekształceń afinicznych:
- współliniowość (koplanarność, etc) punktów
- równoległość podprzestrzeni (słaba i silna)
- proporcje podziału odcinka.
- np przecinanie się trzech prostych $L(p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$ w jednym punkcie

4 Przestrzenie rzutowe.

4.1 Dana przestrzeń wektorowa V nad ciałem K. Zbiór prostych (przechodzących przez 0) w V oznaczamy przez $\mathbb{P}(V)$. Mamy $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$, gdzie $v \sim w$ gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $v = \lambda w$.

4.2 Oznaczenie $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Elementy przestrzeni rzutowej są oznaczane przez$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ (to jest klasa wektora $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, czyli prosta rozpięta przez ten wektor).

4.3 Niech $E \subset V$ będzie podprzestrzenią afiniczną, $0 \notin E$, $\dim V - \dim E = 1$. Dopełnienie $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(TE)$ można utożsamić z E.

4.4 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ można pokryć zbiorami $U_i = \{x_i \neq 0\}$. W zbiorze U_i mamy wspóżzędne

$$u_0 = \tfrac{x_0}{x_i},\ u_1 = \tfrac{x_1}{x_i}, \dots,\ \text{bez } u_i\ , \dots\ u_n = \tfrac{x_n}{x_i}\ .$$

4.5 Przykład $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$:

- $u_1 = \frac{x_1}{x_0}$ współrzędna w U_0,
- $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$ współrzędna w U_1.

Mamy $u_1 = 1/v_0$ (tam gdzie to ma sens).

4.6 Przykład $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$:

- $u_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $u_2 = \frac{x_2}{x_0}$ współrzędne w U_0,
- $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$, $v_2 = \frac{x_2}{x_1}$ współrzędne w U_1,
- $w_0 = \frac{x_0}{x_2}$, $w_1 = \frac{x_1}{x_2}$ współrzędne w U_2.

Mamy

$$u_1 = \tfrac{1}{v_0} = \tfrac{w_1}{w_0}\,, \qquad u_2 = \tfrac{v_2}{v_0} = \tfrac{1}{w_0}$$

(tam gdzie to ma sens).

4.7 Dla dowolnej hiperpowierzchni $H \subset V$ definiunemy zbiór $U_H = \{L \in \mathbb{P}(V) \mid L \not\subset H\}$. Wybór $v \in V \setminus H$ pozwala utożsamić U_H z przestrzenią afiniczną H. Różne wybory v dają utożsamienia różniące się o automorfizm afiniczny będący złożeniem homotetii (jednokładności) z przesunieciem. Gdy $V = \mathbb{K}^{n+1}$ to $U_i = U_{\{x_i=0\}}$.

4.8 Zobaczyć jak wygląda okrąg $(u_1)^2+u_2^2 = 1$ we współrzędnych v_0, v_2 oraz we współrzędnych w_0, w_1.

4.9 Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej: $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto [f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_n(x)]$, gdzie $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ oraz $f = (f_0, f_1, \dots f_n) : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ jest izomorfizmem liniowym.

4.10 Przekształcenia rzutowe przestrzeni afinicznej $\mathbb{K}^n$ utożsamianej z U_0 (jest nie wszędzie określone):

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto (\frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_0}, \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_0}, \dots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_0}),$$

gdzie $\bar{f}_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, n$ są funkcjami afinicznymi powstałymi z funkcji liniowych $f_i : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ przez podstawienie $x_0 = 1$ w **(4.9)**).

4.11 Przykład: $\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u2/u1)$, przeciwobraz okręgu $u_1^2 + u_2^2 = 1$ jest hiperbolą.

4.12 Przekształcenia przestrzeni rzutowej zadane izomorfizmem liniowym przestrzeni V są oznaczane przez $PGL(V)$, lyb gdy $v = \mathbb{K}^{n+1}$ przez $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$. Mamy $PGL(V) = GL(V)/\sim$, $\phi \sim \psi$ gdy $\phi\psi^{-1} = \lambda Id_V$. Mamy ciąg dokładny

$$\mathbb{K}^* \hookrightarrow GL_{n+1}(\mathbb{K}) \twoheadrightarrow PGL_{n+1}(\mathbb{K})$$

5 Przestrzenie rzutowe (cd)

Płaszczyzna rzutowa:

5.1 Proste równoległe w $\mathbb{K}^2$ zadane równaniami $u_2 = a$ w mapie U_0 ze współrzędnymi u_1, u_2. We współrzędnych $v_0 = 1/u_1$, $v_2 = u_2/u_1$ tworzą pęk prostych przechodzących przez punkt. Proste równoległe $u_2 = au_1 + b$ (a ustalone, b dowolne) we współrzędnych v_0, v_2 mają równaniie $v2 = a + bv_0$, punkt $v_0 = 0$, $v_2 = a$ jest wspólny. Dostajemy pęk prostych.

5.2 Przekształcenie $(u_1, u_2) \mapsto (\frac{2u_1}{1+u_2}, \frac{1-u_2}{1+u_2})$ przekształaca parabolę $u_2 = u_1^2$ na okrąg.

5.3 Przekształcenia rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ zachowujące $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, są indukowane przez $\phi \in GL(\mathbb{K}^{n+1})$,

$$\phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (f_0(x_0, x_1, \dots, x_n), f_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_0, x_1, \dots, x_n))$$

takie, że $f_0(1, x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Czyli takie, że $f_0(1, x_1, \dots, x_n) = a_{0,0}$. Tzn macierz ϕ ma w zerowym wierszu tylko zerowy wyraz niezerowy. Takie przekształcenie rzutowe ma wzór we spółrzędnych afinicznych

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{f_0(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}}, \frac{f_1(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}}, \dots, \frac{f_n(1, x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_{0,0}}\right),$$

Zatem jest przekształceniem afinicznym. (Inna charakteryzacja: $\phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}$, tzn zachowuje hiperpłaszczyznę w nieskończoności.)

5.4 Mamy
$\{\phi \in Aff(\mathbb{K}^n) \mid \phi(0) = 0\} = GL(\mathbb{K}^n)$
$\{\phi \in \text{Przekształcenia rzutowe } \mid \phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}\ \} = Aff(\mathbb{K}^n)$

5.5 Przekształcenie prostej rzutowej: $x \mapsto \frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x}$ można przedstawić jako złożenie przekształceń afinicznych i $x \mapsto 1/x$ bo $\frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x} = \alpha(1 + \beta\frac{1}{x+\gamma})$ dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(Przekształcenia postaci $a \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ nazywamy homografiami.)

5.6 Przekształcenia liniowe zachowują proporcję $a := \alpha/\beta$, dla $\alpha = a\beta$.
Przekształcenia afiniczne zachowują stosunek $\lambda(p, q, r) := \lambda = \frac{p-r}{p-q}$ gdy $r = (1 - \lambda)p + \lambda q$.

5.7 Niech $L \subset \mathbb{P}(V)$ będzie prostą w przestrzeni rzutowej. Wprowadzamy współrędną na prostej, tzn utożsamić L z $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Dla $p, q, r, s \in \mathbb{K}$ definiujemy dwustosunek:

$$(p, q; r, s) := \frac{\lambda(p, s, r)}{\lambda(q, s, r)} = \frac{p - r}{p - s} \cdot \frac{q - s}{q - r} \in \mathbb{K}$$

.

5.8 Tw: Przekształcenia rzutowe zachowują dwustosunek. W szczególności dwustosunek nie zależy do współrzędnej.
(Dw: Bo przekształcenia afiniczne zachowują stosunek trzech punktów na prostej. Wystarczy sprawdzić dla $x \mapsto 1/x$.)

5.9 Dla ustalonych p, q, r przekształcenie $s \mapsto (p, q, ; r, s)$ zadaje przekształcenie $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Dla $p = \infty$, $q = 0$, $r = 1$ mamy

$$s \mapsto (\infty, 0; 1, s) = \frac{\infty - 1}{\infty - s} \cdot \frac{0 - s}{0 - 1} = s\,.$$

Każde przekształcenie zachowujące dwustosunek i będące stałe na $\infty, 0, 1$ jest stałe. Stąd przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na trzech punktach.

5.10 W jezyku przestrzeni liniowych: przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^2$ jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do skalara przez warunek na trójce prostych: $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$.

5.11 Przekształcenie liniowe jest wyznaczone przez wartośći na n wektorach liniowo niezależnych ($n = \dim(V)$).

5.12 Przekształcenie afiniczne jest wyznaczone przez wartośći na $n{+}1$ punktach afinicznie niezależnych ($n = \dim(E)$).

5.13 Niecv $\dim V = n + 1$. Punkty $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ są w położeniu ogólnym, gdy żadne $n + 1$ z nich nie leży w przestrzeni rzutowej mniejszego wymiaru (Warunek na położenie ogólne w języku przestrzeni liniowych: Niech $L_i = lin\{v_i\}$, $i = 0, 1, \ldots n + 1$; zakładamy, że każde $n + 1$ wektorów v_i jest liniowo niezależnych.)

5.14 Tw: Przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na $n{+}2$ punktach położeniu ogólnym.

Dowód: niech $p_i = [\varepsilon_i] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dla $0 \le i \le n$ będzie prostą rozpiętą przez standardowy i-ty wektor bazowy $\mathbb{K}^{n+1}$ oraz $p_{n+1} = [1 : 1 : \cdots : 1]$. Dany $q_i = [w_i]$ inny układ prostych, takich, że każde $n + 1$ spośród wektorów w_i są liniowo niezależne. Istnieje przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^{n+1}$ przekształcające ε_i na w_i dla $i \le n$. Dlatego można założyć, że $w_i = \varepsilon_i$ dla $i \le n$. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ będą współrzędnymi wektora w_{n+1}. Przekształcenie o macierzy diagonalnej z $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na przekątnej przeprowadza $(1, 1, \ldots, 1)$ na w_{n+1}. Z dokładnością do proporcjonalności przekształcenie to jest jedyne, jeśli ma zachowywać osie w $\mathbb{K}^{n+1}$, a obraz $(1, 1, \ldots, 1)$ ma być proporcjonalny do w_{n+1}.

5.15 Ćwiczenie: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = Sfera/antypodyzm = dysk $\cup$ wtęga Möbusa.