Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $w = 3 + i\sqrt{3}$ i niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid Re((1+i)z^3) \leq 0\}$.
a) Przedstawić liczbę w^{101} w postaci $a + bi$ dla $a, b \in \mathbf{R}$.
b) Naszkicować zbiór D. Czy $w \in D$?

2. Niech $s \in \mathbf{R}$ i niech U będzie układem równań w $\mathbf{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = s^2 + 2s \\ 2x_1 + 5x_2 + (4 - s^2)x_3^6 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2s(s+2) \ . \end{cases}$$

a) Dla $s = 2$ znaleźć rozwiązanie ogólne układu U.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ zbiór rozwiązań układu U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $V = \mathrm{lin}((4,-1,-5,2),(1,1,-1,-1),(1,0,0,-1),(2,1,3,-6)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Znaleźć bazę przestrzeni V zawierającą wektor $(1,-1,0,0)$.

4. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W.
b) Znaleźć wszystkie wartości $r \in \mathbf{R}$, dla których układ wektorów $(1,0,0,-2)$, $(-2,0,0,r)$ można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$ wektorami leżącymi w W. Dla każdej takiej wartości r podać przykład otrzymanej w ten sposób bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq n+1$ istnieje w V układ liniowo zależny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ taki, że każdy jego podukład właściwy jest liniowo niezależny.

GAL, Kolokwium nr 1, Temat A

18 listopada 2005

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1

Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant \mathrm{Im}z\} \subset \mathbb{C}$ i niech funkcje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oraz $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będą określone wzorami

$$f(z) = (\sqrt{3} + i)z^3 + 2i$$
$$g(z) = (z + 3)^3.$$

Naszkicować i opisać zbiór

(a) $f(D)$
(b) $g^{-1}(D)$

Zadanie 2

Dla wielomianu $f(x) = x^8 + x^4 + 1$ znaleźć:

(a) rozkład f na iloczyn czynników stopnia 1 o współczynnikach w $\mathbb{C}$.
(b) rozkład f na iloczyn czynników stopnia $\leqslant 2$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Zadanie 3

Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ jeżeli:

(a) V jest przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $V = \mathrm{lin}((1, 2, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 3), (1, 3, 1, s))$, gdzie $s \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4

Niech $\alpha_1, ..., \alpha_m$ będą wierszami macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ i niech $\beta_1, ..., \beta_m$ będą wierszami macierzy $B \in M_{m\times n}(K)$ otrzymanej z A za pomocą ciągu operacji elementarnych na wierszach. Pokazać, że:

(a) $\mathrm{lin}(\alpha_1, ..., \alpha_m) = \mathrm{lin}(\beta_1, ..., \beta_m)$.
(b) jeżeli B jest macierzą schodkową oraz $\beta_1, ..., \beta_r$ są jej wszystkimi wierszami niezerowymi, to $\beta_1, ..., \beta_r$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathrm{lin}(\alpha_1, ..., \alpha_m)$.

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K mająca bazę nieskończoną $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $V_n = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \subset V$.

(a) Wykazać, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $W \subset V_n$.
(b) Podać przykład takiej podprzestrzeni $W \subset V$, że $W \neq V$ i dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ zachodzi $\{a\alpha + \beta \mid a \in K, \beta \in W\} = V$.

GAL potok 1, kolokwium nr 1, 24.11.2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1.
a) Znaleźć postaci trygonometryczne pierwiastków stopnia 4 z liczby -9.
b) Wielomian $x^8 + 18x^4 + 81$ przedstawić jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia 2.

2. Niech $V \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Niech $W = \mathrm{lin}((\mathrm{s}, 1, 1, -\mathrm{s}-5), (4, 2, 2, \mathrm{t}), (-6, -3, -3, 21))$. Dla jakich $s, t \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $V = W$?

3. Niech $V = \mathrm{lin}((1, 1, 3, 2), (4, 5, 2, 5), (2, 3, -4, 1), (1, 2, -5, 5)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Dla jakich wartości $r \in \mathbf{R}$ istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$ spełniająca warunki: $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ oraz wektor $\beta = (1, 1, 3, 3)$ ma w tej bazie współrzędne 0, 1, r, 0 ? Dla każdego takiego r podać przykład takiej bazy.

4. Wykazać, że każdą k wymiarową podprzestrzeń $V \subset K^n$ można opisać układem $n - k$ równań liniowych.

5.
a) Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla jakich $m \in \mathbf{N}$ każde dwie m wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni V mają niezerową część wspólną? Odpowiedź uzasadnij.
b) Niech V będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykazać, że istnieje ciąg podprzestrzeni $V_i \subset V$, $i = 1, 2, ...$ taki, że dla każdego i zachodzi $\dim V_i = \infty$ oraz dla każdych $i \neq j$ zachodzi $V_i \cap V_j = \{0\}$.

GAL potok 1, kolokwium nr 1, 23.11.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ i niech $D = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(iw) > 0\}$.
a) Znaleźć liczby rzeczywiste a, b takie, że $z^{100} = a + bi$.
b) Naszkicować zbiór D. Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 24$ zachodzi $z^k \in D$?

2. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ rozpatrzmy wektory $\alpha_1 = (1,3,1,3), \alpha_2 = (3,8,2,9), \alpha_3 = (1,5,2,6)$, $\beta = (0,3,2,3)$.
a) Czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny? Czy wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
b) Podać przykład takiego wektora $\gamma \in \mathbf{R}^4$, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}^4$. Niech y_1, y_2, y_3, y_4 będą współrzędnymi wektora α_3 w otrzymanej bazie. Znaleźć y_4.

3. Niech $V = \mathrm{lin}((1,1,-2,-5),(1,2,-3,-8),(3,4,-7,-18)) \subset \mathbf{R}^4$ i dla każdego $s \in \mathbf{R}$ niech $W_s \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$

a) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.
b) Dla jakich wartości $s \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $\mathbf{R}^4 = V \oplus W_s$?

4. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V.
a) Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z wektorów tego układu nie jest kombinacją liniową pozostałych.
b) Wykazać, że jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i $\beta \in V$, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

5.
a) Niech W będzie k wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami takimi, że $W_1 \neq W_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$ oraz $\dim (W_1 \cap W_2) = k-2$. Wykazać, że $W = W_1 + W_2$.
b) Niech V_1, V_2, V_3 będą m wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $\dim (V_1 \cap V_2) = \dim (V_1 \cap V_3) = \dim (V_2 \cap V_3) = m-1$. Wykazać, że $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3$ lub $\dim (V_1 + V_2 + V_3) = m+1$.
c) Niech $V_1, V_2, \ldots$ będzie ciągiem m wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej V takim, że $\dim (V_i \cap V_j) = m-1$ dla wszystkich $i \neq j$. Wykazać, że: (istnieje podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\dim W = m-1$ oraz $W \subset V_i$ dla każdego i) lub (istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $\dim Z = m+1$ oraz $V_i \subset Z$ dla każdego i).

GAL, Kolokwium 1, 04.12.2008

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać:
imię, nazwisko i numer indeksu osoby zdającej (BARDZO CZYTELNIE),
nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \quad Re(-iz^3 + i) > 0\}.$$

Dla jakich wartości $1 \leq k \leq 8$, $(-1+i)^k \in D$.

(2) Niech U będzie następującym układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + sx_2 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + tx_4 = -1. \end{cases}$$

(a) Rozwiązać układ równań U dla $s = 2$ i $t = 5$.

(b) Znaleźć wszystkie wartości parametów s i t dla których układ równań U jest sprzeczny.

(3) Niech $V = lin((1,2,-1,3),(1,1,1,1),(-1,0,-3,1),(1,3,-3,4+s)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wymiar przestrzeni V w zależności od parametru $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ wektory $w_1 = (1,2,1,2)$, $w_2 = (-1,-1,0,1)$ można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$ wektorami należącymi do przestrzeni V, podać przykład takich wektorów $v_1, v_2 \in V$.

(c) znaleźć współrzędne wektora $(-5,-7,-2,-1)$ w znalezionej bazie w_1, w_2, v_1, v_2.

(4) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V.

(b) Dla każdego wektora $v \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ taki, że $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

(5) Niech U i W będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V (nad ciałem K) takimi, że

$$dim(U + W) = dim(V \cap W) + 1.$$

Udowodnić, że $U + W = U \cup W$.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 19.11.2010

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,(z) < 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ |z| < 2\}$ i niech funkcja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = (1+i)\cdot z^2 + 1$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f(\mathcal{D})$.
   (b) Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $z_k = \frac{(1+i\sqrt{3})^k}{300}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $z_k \in \mathcal{D}$?

2. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń $V = \mathrm{lin}\,((1,2,1,2),(3,5,1,7),(5,9,3,11))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Czy wektor $\alpha = (1,1,0,1)$ należy do V?
   (b) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V. Czy V można opisać jednym równaniem liniowym? Czy V można opisać układem trzech równań liniowych? Odpowiedź uzasadnij.

3. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń W będącą przestrzenią rozwiązań układu równań
$$U\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W. Znalezioną bazę przestrzeni W dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w taki sposób aby w tej bazie wektor $\beta = (1,2,4,3)$ miał współrzędne $1,1,0,1$. Czy istnieje baza przestrzeni W, którą można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w ten sposób, że wektor β ma w tej bazie współrzędne $1,1,0,0$? Odpowiedź uzasadnij.
   (b) Niech $W_s = \mathrm{lin}\,((1,5,1,3),(2,3s+10,s+2,2s+6)$. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_s = W$?

4. Niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Stosując definicje: podprzestrzeni, kombinacji liniowej układu wektorów i liniowej niezależności układu wektorów, wykazać, że
   (a) Zbiór $\mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.
   (b) Jeśli układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ jest liniowo niezależny oraz $\beta \in V$, to układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $\beta \notin \mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

5. (a) W $\mathbb{R}^3$ podać przykład takiego układu wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, którego każdy jego podukład złożony z trzech wektorów jest liniowo niezależny.
   (b) Czy istnieje taki układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Czy istnieje taki nieskończony układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Uzasadnić.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 18.11.2011

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\,(z) < 0,\ \mathrm{Im}\,(z) \leqslant 0,\ |z| < 8\}$ i niech funkcja $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = z^3$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f^{-1}(\mathcal{D})$.
   (b) Znaleźć wszystkie pierwiastki równania $z^3 = |z|$, które należą do $\mathcal{D}$.

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są wektory $\alpha_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (-1, -2, -1, -2)$, $\beta = (1, 1, 1, 0)$ oraz podprzestrzeń V opisana następującym układem równań
$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ -2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$
   (a) Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpinają V? Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są bazą V? Czy β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
   (b) Podać przykład bazy $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ w $\mathbb{R}^4$ takiej, że $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ oraz wektor β ma w tej bazie współrzędne $1, 1, -1, 1$.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie $V = \mathrm{lin}\,((1, 1, -2), (1, 2, -3), (2, 3, -5))$ oraz $W_t = \mathrm{lin}\,((2, 3, -5), (1, -2, 2 + t))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Udowodnić, że V można opisać jednym równaniem.
   (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_t = V$?

4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$.
   (a) Wykazać, że jeśli układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jest liniowo niezależny, to istnieją wektory $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ takie, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jest bazą V,
   (b) Wykazać, że jeśli $V = \mathrm{lin}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, to z układu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ można wybrać podukład $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$, który jest bazą V.

5. (a) Podać przykład przestrzeni liniowej V nad skończonym ciałem K takiej, że $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla pewnych podprzestrzeni właściwych $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$ (podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy właściwą, jeśli $W \neq V$ i $W \neq \{\theta\}$).
   (b) Niech V będzie przestrzenią liniową nad nieskończonym ciałem K. Udowodnić, że $V \neq W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla dowolnych właściwych podprzestrzeni $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$.

GAL, Kolokwium 1. Zestaw A

23 listopada 2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1 *(punkty: 16)*
Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\tfrac{z+10i}{z+8-6i}| > 1\} \qquad B = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^2 \in A\}.$$

Zadanie 2 *(punkty: 16)*
Niech $w(x) = x^4 + 10x^2 + 169$

a) Znajdź wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$ *spełniające:* $w(x) = 0$.

b) Zapisz $w(x)$ *jako iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych.*

Zadanie 3 *(punkty: 16)*
Niech $V = \mathrm{lin}\{(1,1,1,1),(2,1,0,2),(1,2,3,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ *i niech* $W \subset \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Znajdź bazy przestrzeni V, W *oraz* $V \cap W$. *Bazę przestrzeni* $V \cap W$ *uzupełnij do bazy przestrzeni* $V + W$.

Zadanie 4 *(punkty: 16)*
Niech $V = \mathrm{lin}\{(1,2,3,4),(1,3,2,1),(2,8,2,-4)\} \subset \mathbb{R}^4$

a) Policz wymiar V.

b) Znajdź takie podprzestrzenie $U, W \subset \mathbb{R}^4$ *by* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W = U \oplus V = W \oplus V$ *lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.*

Zadanie 5 *(punkty: 16)*
Niech V_1 *i* V_2 *będą* n *wymiarowymi podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* V *(tzn.* $\dim V_1 = \dim V_2 = n, \dim V < \infty$*).*

a) Załóżmy, że układ $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ *jest bazą* V_1 *oraz układ* $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ *jest bazą* V_2. *Wykaż, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\}$ *jest bazą* $V_1 + V_2$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$.

b) Wykaż, że istnieje podprzestrzeń W *przestrzeni* V *taka, że* $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$.

Teoria.(punkty: 20)

a) Napisz definicję bazy przestrzeni liniowej.

b) Sformułuj twierdzenie (lemat) Steinitza o wymianie.

c) Udowodnij, że jeżeli V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K to:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

GAL, Kolokwium 1. Zestaw A

25 listopada 2013

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1 *Niech* $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będą określone wzorami:* $f(z) = 2iz^3 + i$ *oraz* $g(z) = 9z^2$. *Niech* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0,\ Im(z) < 0\}$. *Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:*

a) $f(A)$.

b) $g^{-1}(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$.

Zadanie 2

a) Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^4\overline{z} = 81|z|$.

b) Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $x^6 - 2^6 \in \mathbb{C}[x]$ *i rozłóż ten wielomian na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia* ≤ 2.

Zadanie 3 *Niech* $V = lin\,\{(2,3,-1,0)\,,(1,1,0,1)\,(2,1,1,4)\}$

i $W = lin\,\{(2,3,3,4)\,,(3,4,3,5)\,(1,1,1,2)\}$ *będą podprzestrzeniami* R^4

a) Opisz przestrzeń V *układem równań.*

b) Znajdź bazę przestrzeni $V + W$.

Zadanie 4 *Niech* $W_t \subset R^3$ *będzie przestrzenią opisaną układem równań:*

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + tx_3 = 0 \end{cases}$$

zaś $U_s = \text{lin}\{(1,s,1),\ (3,9,s)\}$.

a) Znajdź wymiar W_t *w zależności od parametru* t.

b) Zbadaj dla których wartości parametrów s *i* t *zachodzi* $\mathbb{R}^3 = W_t \oplus U_s$.

Zadanie 5 *Niech* V *będzie przestrzenią wymiaru skończonego nad ciałem* K.

a) Niech $m \geq 1$ *i układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta\}$ *wektorów z przestrzeni* V *jest liniowo niezależny. Wykaż, że*

$$\dim(\,lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \cap lin\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, ..., \alpha_m + \beta\}) = m - 1.$$

b) Wykaż, że jeżeli W, U *są właściwymi podprzestrzeniami liniowymi* V *i* $V = W \oplus U$, *to istnieje podprzestrzeń* U' *przestrzeni* V *taka, że* $V = W \oplus U'$ *i* $U \neq U'$.

Teoria

a) Napisz definicję przestrzeni liniowej nad ciałem K.

b) Udowodnij, że w zbiorze niezerowych liczb zespolonych wykonalne jest dzielenie.

c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru skończonego i $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ jest układem wektorów V . Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) Układ $\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V

(2) Układ $\mathcal{B}$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.
- numer potoku.

Temat A

1. (a) Naszkicować zbiór $D = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^3) > Re(z^3)\}$
   (b) Rozwiązać równanie $\overline{z}z^3 = \frac{|z|}{8i}$

2. Niech $\mathcal{U}$ będzie układem równań

$$\begin{cases} px_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = p \\ x_1 + px_2 + x_3 + px_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

gdzie $p \in \mathbb{R}$
(a) Rozwiązać układ równań $\mathcal{U}$ dla $p = 1$,
(b) Dla jakich wartości p układ jest niesprzeczny.

3. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $\mathcal{V}$, jeżeli
(a) $\mathcal{V} = Lim\{(1,2,1,-2),(2,3,1,0),(4,7,3,-2),(5,8,3,-2)\}$.
(b) $\mathcal{V}$ jest przestrzenią rozwiązań układu

$$\mathcal{V} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

4.Niech $\alpha_1, ..., \alpha_n$ będzie układem wektorów przestrzeni $\mathcal{V}$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
(1) układ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ jest liniowo niezależny i rozpina $\mathcal{V}$.
(2) układ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym.

5.(a)Niech funkcje $f_1(x) = |x-1|$, $f_2(x) = |x-2|$ i $f_3(x) = |x-3|$ będą elementami przestrzeni liniowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$. Wykazać, że układ f_1, f_2, f_3 jest liniowo niezależny.
(b) Niech $\mathcal{V} = \mathbb{R}_n[x]$ będzie przestrzenią liniową wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia nie większego niż n. Znaleźć współrzędne wielomianu $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ w bazie $1, x-1, (x-1)^2, ..., (x-1)^n$ przestrzeni V.