GAL, kolokwium nr 2, 14.01.2005, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech V, W_t będą następującymi podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbf{R}^4$
$V = \mathrm{lin}((1,-1,-1,-1),(-3,4,0,1),(-5,6,2,3))$, $W_t = \mathrm{lin}((1,\mathrm{t},2,1),(2,2\mathrm{t},\mathrm{t},2))$.
a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ zachodzi $R^4 = V \oplus W_t$?

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem
$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4)$.
a) Znaleźć bazę jądra przekształcenia φ
b) Niech $Z = \{\psi \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^4) \mid \varphi \circ \psi$ jest przekształceniem zerowym$\}$.
Znaleźć wymiar przestrzeni Z.
Podać przykład (podając wzór) takiego przekształcenia liniowego $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, że $\psi \in Z$ i rząd ψ wynosi 2.

3. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ dla $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,2,2)$, $\beta_1 = (1,1), \beta_2 = (1,2)$ oraz niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Znaleźć $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$. Dla wektora $\alpha = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3$ znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$.
b) Niech $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$M(\psi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.
Wykazać, że $\ker(\varphi \circ \psi)$ ma wymiar 1 i znaleźć bazę obrazu przekształcenia $\varphi \circ \psi$.

4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami. Wykazać, że $\dim(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2) = \dim \mathrm{W}_1 + \dim \mathrm{W}_2 - \dim(\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2)$.

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K, $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ będzie bazą przestrzeni W oraz niech $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Wykazać, że
a) φ jest epimorfizmem $\iff$ wiersze macierzy A tworzą układ liniowo niezależny,
b) φ jest monomorfizmem $\iff$ dla każdego przekształcenia liniowego $\psi_1 : V \to K$ istnieje przekształcenie liniowe $\psi_2 : W \to K$ takie, że $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$.

GAL, Kolokwium nr 2, Temat B

20 stycznia 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1

Niech $V_1 = \mathrm{lin}((1,-1,0,-1),(t,2,2,1)$ oraz V_2 opisane układem równań

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^4$. Znaleźć:

(a) wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$

(b) znaleźć bazę przestrzeni $V_1 + V_2$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2

Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

(a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $\ker\varphi = W$ oraz $\varphi((1,1,1)) = (3,2)$. 1)

(b) Niech $Z = \{\psi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad | \quad \psi|_W : W \to W$ jest jednokładnością $\}$. Wykazać, że Z jest podprzestrzenią przestrzeni linowej $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ i obliczyć $\dim Z$.

Zadanie 3

Niech $\mathcal{A} = \{(2,-1),(1,-2)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((6,-6))$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem zdanym wzorem $\psi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + tx_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\psi \circ \varphi$ jest izomorfizmem?

Zadanie 4

Załóżmy, że $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Pokazać. że:

(a) φ jet monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $\ker\varphi = \{0\}$.

(b) $\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{im}\varphi = \dim V$

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n.

(a) Pokazać, że istnienie przekształcenia liniowego $\varphi : V \to V$ oraz podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ przestrzeni V spełniających warunek $\mathrm{im}(\varphi) = W = \ker(\varphi)$ jest równoważne temu, że $2\dim W = \dim V$.

(b) Pokazać, że jeżeli $\varphi : V \to V$ jest takim przekształceniem liniowym, że $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n-\text{razy}} = 0 \neq \varphi^{n-1}$, to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

GAL potok 1, kolokwium nr 2, 19.01.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^4$, $V_1 = \mathrm{lin}((1,1,0,2),(1,0,1,\mathrm{t}),(1,2,1,1))$, $V_2 = \mathrm{lin}((0,1,1,-1),(1,0,\mathrm{t},3))$.
a) Znaleźć $\dim(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2)$ oraz $\dim(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2)$ w zależności od $t \in \mathbf{R}$.
b) Niech $Z = V_1 + V_2$. Dla każdego $t \in \mathbf{R}$ znaleźć taką podprzestrzeń $W \subset \mathbf{R}^4$, że $\mathbf{R}^4 = Z \oplus W$.

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,0)\}, \mathcal{B} = \{(1,2),(1,3)\}$ macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i niech $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie zadane wzorem $\psi((y_1,y_2)) = (y_1 - y_2, y_1 + 2y_2)$.
a) Niech $\alpha \in \mathbf{R}^3$ będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne 2, 1, 1. Znaleźć współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C} = \{(0,1),(1,2)\}$.
b) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ takie, że $\varphi \circ \varphi_1$ jest jednokładnością o skali 5.

3. a) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Obliczyć $\det A$.
b) Czy istnieje macierz $B \in M_{4\times 4}(\mathbf{R})$ o wyrazach całkowitych parzystych taka, że $\det B = 140$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy. Jeśli nie, to uzasadnić dlaczego nie istnieje.

4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
a) Wykazać, że φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\varphi) = \{0\}$.
b) Niech $\dim\mathrm{V} = \mathrm{n}$, $\dim\mathrm{W} = \mathrm{m}$ oraz $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ będą bazami V i $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą bazami W. Wykazać, że istnieją macierze $C \in M_{n\times n}(K), D \in M_{m\times m}(K)$ takie, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = D \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot C.$$

5. Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\dim\mathrm{V} = \mathrm{n}$. Dla każdej liczby naturalnej m niech $\varphi^m = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (m krotne złożenie φ).
a) Wykazać, że dla każdego m zachodzi zawieranie $\mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{m}+1}) \subset \mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{m}})$.
b) Niech $n = 11$ i niech dla $1 \le k \le 4$ zachodzi $\mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{k}+1}) \neq \mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{k}})$. Wykazać, że $\dim\ker(\varphi) \le 7$.
c) Wykazać, że jeśli $\varphi^3 = \varphi$, to $V = \ker(\varphi^2) \oplus \mathrm{im}(\varphi^2)$.

GAL, Kolokwium 2, 22.01.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Dla dowolnych parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ niech W_{st} będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisaną następującym układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +(s-1)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & tx_4 & = 0 \\ x_1 & -3x_3 & (2s-1)x_3 & (t-4)x_4 & = 0 \end{cases}$$

i niech $V = lin((1,2,1,-2),(1,-1,1,1),(-1,10,-1,-10)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Dla jakich parametrów $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_{st}$.

(b) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \cap W_{st}$ w zależności od s i t. Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W_{st}$ w zależności od s i t.

(c) Czy istnieją takie parametry $s, t \in \mathbb{R}$, że $V \cap W_{st} = V$?

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, gdzie V_1, V_2 są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$ opisanymi następującymi układami równań:

$$V_1: \begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}, \quad V_2: \begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = 0 \end{cases},$$

(a) Znaleźć wzór na φ oraz jego macierz w bazie standardowej.

(b) Podać przykłady (podając wzory) przekształceń liniowych $\psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takich, że $dim(im\psi_1) = 1$, $dim(im\psi_2) = 2$ oraz $\varphi \circ \psi_1$, $\varphi \circ \psi_2$ są przekształceniami zerowymi (tzn. $\varphi \circ \psi_1(v) = (0,0,0,0) = \varphi \circ \psi_2(v)$ dla dowolnego wektora v).

(c) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\psi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że $dim(im\psi) = 3$ i $\varphi \circ \psi$ jest przekształceniem zerowym.

(3) Niech $\mathcal{A} : (2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1)$ i $\mathcal{B} : (1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)$ będą dwiema bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((2,-1,2))$ w bazie $\mathcal{A}$.

(b) Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.

(c) Znaleźć bazę $ker(\psi)$. Czy $ker(\psi) = ker(\psi \circ \varphi)$?

(4) Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi: V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że

(a) $ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

(b) $dim(ker\varphi) + dim(im\varphi) = dimV$

(5) Dla $i = 0,1,2$, niech $\varphi_i: V_i \longrightarrow V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym pomiedzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Udowodnić, że

(a) $r(\varphi_1) \leq r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + dim(ker\varphi_2)$.

(b) $r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + r(\varphi_1 \circ \varphi_0) \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_0)$.

$r(\varphi)$ oznacza rząd przekształcenia φ, tzn. $r(\varphi) = dim(im\varphi)$.

GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 21.01.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech V_t i W będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ takimi, że

$$V_t = lin((1,2,2,1),(1,1,-1,t)), \qquad W\colon \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

   (a) Znaleźć $\dim(V_t + W)$ i $\dim(V_t \cap W)$ w zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem V_1 wzdłuż W. Obliczyć $\varphi((1,1,2,0))$.

2. Dane są bazy $\mathcal{A}\colon (1,0,1),(0,1,1),(1,2,-1)$, $\mathcal{B}\colon (1,1,1),(0,2,1),(0,-1,0)$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$.

   (a) Funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ ma współrzędne $-1,2,1$ w bazie dualnej do $\mathcal{B}$. Znaleźć wzór na f. Znaleźć współrzędne f w bazie dualnej do $\mathcal{A}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $g(x_1,x_2,x_3) = rx_1 + x_2 - x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ należy do jądra przekształcenia sprzężonego φ^*?

3. Dane są macierze $A_t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$.

   (a) Obliczyć $\det B$. Obliczyć $\det(A_t^5 B^{-7})$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem $M(\varphi)_{St}^{St} = C_t$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ jest izomorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć macierz w bazie standardowej przekształcenia φ^{-1}.

4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

   (a) Wykazać, że $\ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz wykazać, że $\operatorname{im}(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W.

   (b) Wykazać, że $\dim V = \dim\ker(\varphi) + \dim\operatorname{im}(\varphi)$.

5. (a) Niech $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(K)$. Wykazać, że:

   (A_2 może być otrzymana z A_1 ciągiem operacji elementarnych na wierszach) $\Longleftrightarrow$ (istnieje macierz odwracalna $C \in M_{m\times m}(K)$ taka, że $A_1 = CA_2$).

   (b) Niech $B, B_1, B_2 \in M_{m\times n}(K)$. Załóżmy że dla $i = 1,2$ macierz B_i jest schodkowa zredukowana i może być otrzymana z B ciągiem operacji elementarnych na wierszach. Wykazać, że $B_1 = B_2$.

GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 20.01.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są dwie podprzestrzenie $V_t = \operatorname{lin}((-1,2,1,0),(0,1,2,t-1))$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, oraz $W\colon \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = 0 \end{cases}$.

   (a) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V_t \oplus W$?

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na W wzdłuż V_0. Podać przykład wektora $\alpha \in \mathbb{R}^4$ takiego, że $\alpha \notin W$ oraz $\varphi(\alpha) = (1,-1,1,1)$.

   (c) Czy istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $\alpha_1 = (1,0,0,1)$, $\alpha_2 \in W$ oraz wektor $\beta = (2,1,-1,2)$ ma w tej bazie współrzędne $1,-1,0,0$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy. Jeśli nie, to uzasadnić dlaczego.

2. Dana jest baza $\mathcal{A}\colon (1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz baza $\mathcal{B}\colon (1,1),(2,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $M(\psi_t)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & t \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^2$.

   (a) Znaleźć bazę $Ker(\varphi)$ oraz wymiar przestrzeni $Im(\varphi)$.

   (b) Znaleźć wektor $(\varphi \circ \psi_1)((1,4))$.

   (c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem liniowym?

3. Niech $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ oraz $A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (a) Obliczyć $\det A_1$.

   (b) Niech $n = 15$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ macierz A_2 jest odwracalna?

4. Dane są przestrzenie liniowe V, W, U (które mogą być nieskończenie wymiarowe) oraz przekształcenia liniowe $\varphi\colon V \longrightarrow W$ i $\psi\colon W \longrightarrow U$.

   (a) Udowodnić, że $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, gdzie $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ i $\psi^*\colon U^* \longrightarrow W^*$ są przekształceniami sprzężonymi do φ i ψ, odpowiednio.

   (b) Udowodnić, że jeśli $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ jest epimorfizmem, to φ jest monomorfizmem.

verte $\longrightarrow$

5. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V.

   (a) Udowodnić, że $V_1 + V_2$ też jest podprzestrzenią V.

   (b) Udowodnić, że $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

6. Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy gdy $A = a_1 I + a_2 C + a_3 C^2 + \ldots a_n C^{n-1}$ dla pewnych $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, gdzie $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$.

   (a) Udowodnić, że jeśli macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to $AB = BA$.

   (b) Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to ich iloczyn AB też jest macierzą cykliczną.

GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2013

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zestaw A

Zadanie 1.
(a) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3, -x_2 - x_3)$. Znaleźć bazy $\ker\varphi$ oraz $\operatorname{im}\varphi$.

(b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ będą odpowiednio bazami $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ i niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na φ.

Zadanie 2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2 - x_3)$ i $\psi_t(x_1, x_2) = (tx_1 + x_2, -x_1, -x_1 + x_2)$.

(a) Znaleźć macierz w bazach standardowych izomorfizmu odwrotnego do $\varphi \circ \psi_3$.
(b) Zbadć dla jakich t przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem.

Zadanie 3.
(a) Niech $\alpha_1 = (1,0,2)$, $\alpha_2 = (0,1,-1)$, $\alpha_3 = (1,2,1)$ oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ oznacza bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne, w bazie $\mathcal{A}^\star$, funkcjonału $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danego wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$.
(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem $\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego $\psi^\star$.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć wyznaczniki macierzy A i B.
(b) Obliczyć wyznacznik macierzy $A^4 B^{-6} A^T (3B)$.

Zadanie 5. Niech $n > 1$ i $P_{ij} = [p_{kl}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie $p_{kl} = 1$ dla $k = i, l = j$ i $p_{kl} = 0$ w pozostałych przypadkach.
(a) Obliczyć $P_{11}P_{12}$ oraz $P_{12}P_{11}$.

(b) Niech $f : M_{n\times n}(K) \to K$ jest takim funkcjonałem liniowym określonym na przestrzeni macierzy $M_{n\times n}(K)$, że dla każdej pary macierzy A i B zachodzi, $f(AB) = f(BA)$. Pokazać, że istnieje taki element $c \in K$ ciała K, że $f([a_{ij}]) = c(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$ dla każdej macierzy $[a_{ij}] \in M_{n\times n}(K)$.

Teoria.
1) Zdefiniować jądro przekształcenia liniowego i udowodnić, że jest podprzestrzenią.
2) Udowodnić, że złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.
3) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą kwadratową. Dla $i = 1, 2, 3$ niech A_i będzie macierzą powstałą z A przez operację elementarną typu i.
   a) Opisać wyznacznik macierzy A_i w zależności od $\det A$ oraz operacji elementarnej typu i.
   b) Opisać rząd macierzy A_i w zależności od $r(A)$ i operacji elementarnej typu i .

GAL Kolokwium 2, 24 stycznia 2014 **Zestaw A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1
(a) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *takie, że* $\varphi(1,2,2) = (1,0,1,2)$ *oraz* $\ker\varphi = \mathrm{lin}((1,1,3),(1,2,1)$.
(b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,2,3),(3,4,4)\}$ *i* $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,-1)\}$ *będą odpowiednio bazami* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^2$. *Niech* $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *będzie takim przekształceniem liniowym, że* $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na ψ *i macierz* ψ *w bazie standardowej.*

Zadanie 2 *Niech* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *i* $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami* $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$
i $\psi_t(x_1,x_2) = (x_1 + tx_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2)$.

(a) Zbadać, dla jakich wartości parametru t przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ *jest izomorfizmem.*
(b) Zbadać, dla jakich wartości parametru t przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ *jest symetrią.*
(c) Zbadać, dla jakich wartości parametru t przekształcenie $\psi_t \circ \varphi$ *jest izomorfizmem.*

Zadanie 3
(a) Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (3,1,4)$, $\alpha_3 = (1,4,0)$ *oraz niech* $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ *oznacza bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^3$. *Znaleźć współrzędne funkcjonału* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *danego wzorem* $f(x_1,x_2,x_3) = -3x_1 + x_2 + x_3$ *w bazie* $\mathcal{A}^\star$.

(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *będzie dane wzorem:*
$\psi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + x_3,\ 2x_1 + 5x_2 - x_3)$. *Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego* $\psi^\star$. *Funkcjonały znalezionych baz podać wzorami.*

Zadanie 4 *Niech* $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 5 & t & 1 \\ 1 & 2 & t & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć wyznacznik macierzy A_t.
(b) Zbadać dla jakich wartości parametru t rząd macierzy A_t *jest równy 4.*
(c) Uzasadnić, że macierz A_5 *jest odwracalna, ale nie wszystkie jej współczynniki są całkowite.*

Zadanie 5 *Niech* W *i* U *będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni* V.

(a) Niech $\pi_1, \pi_2 \in L(V;V)$ *spełniają warunki:* $\pi_1(W) = U$ *i* $\pi_2(U) = W$.
Udowodnić, że $\dim W = \dim U$.

(b) Niech $\dim W \geq \dim U$. *Udowodnić, że istnieje rzut* $\pi \in L(V;V)$ *taki, że* $\pi(W) = U$.

Teoria 6
a) Podać definicję macierzy przekształcenia liniowego w zadanych bazach.
b) Sformułować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznaczników względem wierszy i kolumn.
c) Udowodnić, że jeżeli V *i* W *są przestrzeniami liniowymi, skończonego wymiaru nad ciałem* K *i* $\varphi : V \to W$ *jest przekształceniem liniowym, to* $\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{im}\,\varphi)$.