GAL Kolokwium 1, 21 listopada 2016, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]
Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^5$ opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + ax_5 = 0. \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć wymiar V w zależności od wartości parametru a.
(b) Dla $a = 0$ znaleźć bazę V_0 zawierającą wektor $(1, 1, 1, -2, 0)$.

Zadanie 2. [18 pt]
Dane wektory $\alpha = (5, 5, 2, 3)$, $\beta = (7, 7, 2, 0)$, $\gamma = (2, 2, 0, 8) \in \mathbb{R}^4$.
a) Opisać przestrzeń rozpiętą przez wektory α i β układem równań.
b) Znaleźć przykład przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ takiej, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha \in V$, $\beta \in V$, ale $\gamma \notin V$. Opisać V równaniem.
c) Traktujemy wektory α, β, γ jako wektory z $(\mathbb{Z}_{11})^4$. Czy istnieje przestrzeń $V \subset (\mathbb{Z}_{11})^4$ taka, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha \in V$, $\beta \in V$, ale $\gamma \notin V$?

Zadanie z teorii 3. [10 pt]
Udowodnić, że układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\beta \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci $\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, gdzie $a_1, a_2, ..., a_n$ są skalarami.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 1, 21 listopada 2016, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Załóżmy, że $1+2i$ oraz $-1+2i$ są pierwiastkami wielomianu $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach rzeczywistych. Czy stopień $w(x)$ może być równy 3?

2. Czy istnieją wektory $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{10}$ takie, że układ $\{\alpha - \beta,\ \beta - \gamma,\ \gamma - \alpha\}$ jest liniowo niezależny?

3. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej V i niech $\beta \neq 0$ będzie niezerowym wektorem V. Czy jest prawdą, że gdy β nie należy do $\mathrm{lin}(\alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n)$ to $\beta, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ jest bazą V ?

4. Znaleźć wektory $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^4$ spełniające równanie $x_1 + 2x_2 + 3x_2 + 2x_4 = 0$ takie, że układ $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$ jest bazą $\mathbb{R}^4$. Jeśli takich wektorów nie ma, to uzasadnić dlaczego.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego i niech $\alpha \neq 0$ będzie niezerowym wektorem V. Czy może istnieć jej podprzestrzeń $W \subset V$ tego samego wymiaru co V (tj. $\dim W = \dim V$) niezawierająca wektora α.

6. Niech W_1 i W_2 będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej V oraz $\dim V = 5$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 4$. Czy wymiar części wspólnej $W_1 \cap W_2$ podprzestrzeni W_1 i W_2 może być równy 2?

Zadanie 5. [18pt]
Niech $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, $\qquad D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leqslant 1\}$.
Dana funkcja $f : \mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C}$ zadana wzorem

$$f(z) = \frac{3z-1}{3-z}\,.$$

a) Sprawdzić, że $f(S) = S$ i $f(D) = D$.
b) Rozłożyć wielomian $x^5 - x \in \mathbb{C}[x]$ na wielomiany nierozkładalne.
c) Rozłożyć wielomian $x^5 - x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na wielomiany nierozkładalne.

Zadanie 6. [18 pt]
Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem oraz $V \subset \mathbb{K}^n$ będzie podprzestrzenią liniową opisaną układem równań liniowych $\mathcal{U} = \{f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \ : \ k = 1, 2, \ldots, m\}$, gdzie $f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,n}x_n$.
Dana jest podprzestrzeń $W \subset \mathbb{K}^n$ zawierająca V.
a) Czy W można opisać podukładem układu $\mathcal{U}$?
b) Załóżmy, że $W \neq \mathbb{K}^n$. Udowodnić, że istnieją współczynniki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, nie wszystkie równe zero, takie, że funkcja $g = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$ zeruje się na W.