GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 28.11.2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie UZASADNIĆ. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów]

Niech $w(x) = x^9 + cx^7 + x^3 + cx$ gdzie $c \in \mathbf{R}$.

(a) Dla $c = 1$ znaleźć rozkład wielomianu $w(x)$ na iloczyn rzeczywistych wielomianów nierozkładalnych.

(b) Podać liczbę różnych pierwiatków zespolonych wielomianu $w(x)$ w zależności od $c \in \mathbf{R}$.

Zadanie 2. [18 punktów]

Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 - 12x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Które z poniższych układów $\mathcal{A}_i$ są bazami przestrzeni W?

$\mathcal{A}_1 = \{(1,0,0,1), (-1,1,1,0), (0,1,1,1)\}$,

$\mathcal{A}_2 = \{(2,2,1,1), (3,0,0,3)\}$,

$\mathcal{A}_3 = \{(2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-2,0,1,1)\}$,

$\mathcal{A}_4 = \{(1,1,1,2), (1,0,0,1), (0,3,2,0), (2,1,0,0)\}$,

$\mathcal{A}_5 = \{(1,0,0,0), (0,1,1,1), (2,1,0,0)\}$.

(b) Znaleźć wymiar przestrzeni $W \cap Z$ dla $Z = \operatorname{lin}((0,0,0,1), (1,0,0,2))$.

Zadanie 3. [18 punktów]

(a) Niech $V = \operatorname{lin}((1,2,1,1), (2,5,6,4), (1,3,5,3)) \subset \mathbf{R}^4$. Znaleźć bazę przestrzeni V. Podać układ równań liniowych opisujący przestrzeń V.

(b) Niech $W = \operatorname{lin}((1,2,1,1), (2,5,6,4), (1,5,3,2), (1,2,2,2a)) \subset (\mathbf{Z}_7)^4$. Dla jakich $a \in \mathbf{Z}_7$ zachodzi równość $\dim W = 3$?

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 28.11.2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie UZASADNIĆ. Rozwiązanie każdego z zadań 5 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

Zadanie 4. [Każde pytanie 3 punkty]

1. Załóżmy, że układ równań

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

   gdzie $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Czy wynika stąd, że $m < n$?

2. Niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid Im(z) > 0\}$ oraz $E = \{z \in \mathbf{C} \mid Re(z) < -2\}$. Czy istnieją liczby $w, u \in \mathbf{C}$ takie, że dla każdego $z \in \mathbf{C}$ zachodzi:
$$z \in D \iff wz + u \in E$$

3. Czy istnieje przestrzeń liniowa V nad ciałem liczb rzeczywistych zawierająca niezerową podprzestrzeń złożoną ze skończonej liczby wektorów?

4. W przestrzeni liniowej V dane są układy wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_k$ przy czym zachodzi $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Załóżmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny. Czy układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ też jest liniowo niezależny?

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $\geqslant 3$. Czy V może zawierać trzy podprzestrzenie V_1, V_2, V_3 takie, że zachodzi: $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, $V_1 \neq V_2$, $V_2 \neq V_3$ oraz $\dim V_1 + 1 = \dim V_3$?

6. Niech V będzie 7-wymiarową przestrzenią liniową zawierajacą 5-wymiarowe podprzestrzenie V_1, V_2 speniające warunek $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$. Czy dla każdego wektora $\alpha \in V$ istnieją wektory $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$?

Zadanie 5. [10 punktów]

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni liniowej V i niech $\beta \in V$. Wykazać, że:

$\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \iff$ Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

Zadanie 6. [18 punktów]

(a) Wykazać, że w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ istnieje nieskończony ciąg podprzestrzeni $2-$wymiarowych $W_1, W_2 \ldots$ taki, że dla każdych $i \neq j$ $W_i \cap W_j = \{0\}$.

(b) Wykazać, że każda $2n-$wymiarowa przestrzeń liniowa V nad nieskończonym ciałem K zawiera nieskończony ciąg podprzestrzeni $n-$wymiarowych $W_1, W_2 \ldots$ taki, że dla każdych $i \neq j$ $W_i \cap W_j = \{0\}$.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **B** 28.11.2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie UZASADNIĆ. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów]

Niech $w(x) = x^{10} + ax^8 + x^4 + ax^2$ gdzie $a \in \mathbf{R}$.

(a) Dla $a = 1$ znaleźć rozkład wielomianu $w(x)$ na iloczyn rzeczywistych wielomianów nierozkładalnych.

(b) Podać liczbę różnych pierwiatków zespolonych wielomianu $w(x)$ w zależności od $a \in \mathbf{R}$.

Zadanie 2. [18 punktów]

Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -6x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Które z poniższych układów $\mathcal{A}_i$ są bazami przestrzeni W?

$\mathcal{A}_1 = \{(0,1,0,1), (1,-1,1,0), (1,0,1,1)\}$,

$\mathcal{A}_2 = \{(1,1,1,2), (0,1,0,1), (3,0,2,0), (1,2,0,0)\}$,

$\mathcal{A}_3 = \{(0,1,0,0), (1,0,1,1), (1,2,0,0)\}$,

$\mathcal{A}_4 = \{(2,2,1,1), (0,3,0,3)\}$,

$\mathcal{A}_5 = \{(1,2,0,0), (0,-3,1,0), (0,-2,1,1)\}$.

(b) Znaleźć wymiar przestrzeni $W \cap Z$ dla $Z = \mathrm{lin}\,((0,1,0,0), (0,2,0,1))$.

Zadanie 3. [18 punktów]

(a) Niech $V = \mathrm{lin}\,((1,2,1,1), (2,5,4,6), (1,3,3,5)) \subset \mathbf{R}^4$. Znaleźć bazę przestrzeni V. Podać układ równań liniowych opisujący przestrzeń V.

(b) Niech $W = \mathrm{lin}\,((1,2,1,1), (2,5,4,6), (1,5,2,3), (1,2,5,5a)) \subset (\mathbf{Z}_7)^4$. Dla jakich $a \in \mathbf{Z}_7$ zachodzi równość $\dim W = 3$?

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **B** 28.11.2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie UZASADNIĆ. Rozwiązanie każdego z zadań 5 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

Zadanie 4. [Każde pytanie 3 punkty]

1. Załóżmy, że układ równań

$$U : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Czy wynika stąd, że $m = n$?

2. Niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid Re(z) > 0\}$ oraz $E = \{z \in \mathbf{C} \mid Im(z) < -3\}$. Czy istnieją liczby $w, u \in \mathbf{C}$ takie, że dla każdego $z \in \mathbf{C}$ zachodzi:

$$z \in D \iff wz + u \in E$$

3. Czy istnieje przestrzeń liniowa V nad ciałem liczb rzeczywistych zawierająca niezerową podprzestrzeń złożoną ze skończonej liczby wektorów?

4. W przestrzeni liniowej V dane są układy wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_k$ przy czym zachodzi $\text{lin}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \text{lin}\,(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Załóżmy, że układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo niezależny. Czy układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ też jest liniowo niezależny?

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $\geqslant 3$. Czy V może zawierać trzy podprzestrzenie V_1, V_2, V_3 takie, że zachodzi: $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, $V_1 \neq V_2$, $V_2 \neq V_3$ oraz $\dim V_3 = \dim V_1 + 1$?

6. Niech V będzie 8-wymiarową przestrzenią liniową zawierajacą 6-wymiarowe podprzestrzenie V_1, V_2 speniające warunek $\dim(V_1 \cap V_2) = 4$. Czy dla każdego wektora $\alpha \in V$ istnieją wektory $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$?

Zadanie 5. [10 punktów]

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni liniowej V i niech $\beta \in V$. Wykazać, że:

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny $\iff$ $\beta \in \text{lin}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$

Zadanie 6. [18 punktów]

(a) Wykazać, że w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ istnieje nieskończony ciąg podprzestrzeni $2-$wymiarowych $W_1, W_2 \ldots$ taki, że dla każdych $i \neq j$ $W_i \cap W_j = \{0\}$.

(b) Wykazać, że każda $2n-$wymiarowa przestrzeń liniowa V nad nieskończonym ciałem K zawiera nieskończony ciąg podprzestrzeni $n-$wymiarowych $W_1, W_2 \ldots$ taki, że dla każdych $i \neq j$ $W_i \cap W_j = \{0\}$.