18 Iloczyny skalarne

18.1 Wybrać bazę przestrzeni $\{x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$. Niech ϕ będzie ograniczeniem iloczynu skalarnego do tej przestzeni. Znaleźć jego macierz w wybranej bazie. Znaleźć bazę ortonormalną.

18.2 Czy formy w zad 17.1 są iloczynami skalarnymi?

18.3 Czy forma zadana przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ jest iloczynem skalarnym? Jeśli nie, to zanaleźć wektory izotropowe, tzn takie, że $\phi(x,x)=0$.

18.4 a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A,B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej macierzy antysymetrycznych.
b) Wykazać, że $\phi(CA,CB) = \phi(A,B)$ jeśli C jest macierzą izometrii.

18.5 Udowodnić, że każdy ortogonalny układ niezerowych wektorów jest liniowo niezależny.

18.6 Niech $\dim W < \infty$ i $U, V \subset W$. Wykazać
a) $(V^\perp)^\perp = V$;
b) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;
c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$;
d) $0^\perp = W$ oraz $W^\perp = 0$.

18.7 Zastosować ortogonalizacje G-S do wektorow:
a) $(1,2,2,-1),\ (1,1,-5,3),\ (3,2,8,-7)$;
b) $(1,1,-1,-2),\ (5,8,-2,-3),\ (3,9,3,8)$;
c) $(2,1,3,-1),\ (7,4,3,-3),\ (1,1,-6,0),\ (5,7,7,8)$.

18.8 Znaleźć wzór na rzut ortogonalny na $\alpha^\perp$, gdzie α jest pierwszym wektorem z punktu a) 18.7.

18.9 Znaleźć wzór na symetrię prostokątna względem $lin\{\beta_1,\beta_2\}$, gdzie β_1,β_2 są dwoma pierwszymi wektorem z punktu b) 18.7.

18.10 Niech $P=\{x_1+2x_2-3x_3=6\}$, $Q=\{x_1+x_2+x_3=3\}$. Znalźć równanie $S_P(Q)$, gdzie S_P jest prostokątna symetrią względem płaszczyzny P.

18.11 Niech $L = \{[0,7,1,2]+t(0,1,-1,0)\}$, $K = \{[1,1,1,1]+t(1,0,0,-1)\}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4,1,3,1]$, która jest prostopadła do L i nie przecina K.

18.12 Znaleźć odległość punktu $[1,2,2]$ od płaszczyzny
$[-1,1,1]+lin\{(1,2,2),\ (1,1,-5)\}$.

18.13 Znaleźć odległość pomiędzy punktem $[-1,2,0]$ a prostą $[0,1,1]+t(1,-1,0)$.

18.14 Znaleźć odległość pomiędzy prostymi
$[1,0,-2]+t(0,1,1)$ i $[1,0,1]+t(1,-1,0)$.

18.15 Opisać wszystkie izometrie $\mathbb{R}^3$:
a) liniowe;
b) afiniczne.

18.16 Formy kwadratowe: sprowadzić do kanonicznej postaci formę
a) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;
b) dla powyższej formy znaleźć ortogonalny (ze względu na standardowy iloczyn skalarny) układ współrzędnych;
c) [Proskuriakow] 1243-1246

18.17 Znaleźć takie współrzędne $\mathbb{R}^2$, że forma $x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$ ma postać $-4u_1u_2$.

18.18 Znaleźć bazę ortogonalną (w iloczynie standardowym) taką, że dana forma kwadratowa ma postać kanoniczną: [Proskuriakow] 1248-1262

18.19 Czy formy kwadratowe są tego samego typu [Proskuriakow] 1237-1238.

19 Powtórzenie

19.1 Niech $L = \{[1,1,1]+t(1,0,0),\ t\in\mathbb{R}\}$ oraz $H=\{x_1+x_2+x_3=2\}$.
a) Podać wzór na rzut ϕ ma L wzdłuż H.
b) Dla jakiego $a\in\mathbb{R}$ obraz $\phi(af\{[1,2,3],[4,a,1]\})$ jest jednym punktem.

19.2 Dany funkcjonał dwuliniowy $\zeta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$. Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$ taka, że macierz funkcjonału ζ jest równa
a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

19.3 Dla jakich parametrów a forma dwuliniowa $\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ jest iloczynem skalarnym?

19.4 Dla jakich parametrów a przestrzenie $lin(3,1,1)$ i $\{x_1+x_2+x_3=0\}$ są prostopadłe ze względu na formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$?

19.5 Dany iloczyn skalarny wzorem $4x_1y_1+4x_2y_2+x_3y_3$ oraz

$$L = \begin{cases} 4x_2-x_3=2 \\ 2x_2+x_3=4 \end{cases} \qquad M = af\{[0,0,2],[1,1,0],[2,2,2]\}.$$

Znaleźć obraz prostej L przy symetrii prostokątnej względem M.

19.6 W $\mathbb{R}^4$ dana podprzestrzeń $V = lin\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}$
a) Wskazać bazy ortonormalne V i $V^\perp$.
b) Niech S będzie symetrią prostokątną względem V. Znaleźć $S(M)$, gdzie

$$M = \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

19.7 Niech $v_1,v_2,\dots v_n \in \mathbb{R}^k$, a h będzie odległością v_1 od $lin\{v_1,v_2,\dots v_{n-1}\}$. Udowodnić wzór na wyznaczniki Gramma:

$$G(v_1,v_2,\dots v_n) = h^2 G(v_1,v_2,\dots v_{n-1}).$$

19.8 Niech V będzie przestrzenią euklidesową wymiaru n. Niech S będzie sympleksem o wierzchołkach $p_0,p_1,\dots p_n$ takich, że $|p_i-p_j|=1$ dla $i\neq j$. Wyznaczyć długość wysokości sympleksu h_n. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} h_n$.

19.9 Obliczyć kąt, jaki tworzą płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $x_1+x_2=4$ i $x_1+x_3=17$.

19.10 Wyznaczyć odległość punktu $p=[1,1,\dots 1]\in\mathbb{R}^{100}$ od płaszczyzny rozpiętej na trzech punktach $[1,0,0,0\dots 0]$, $[1,1,0,0\dots 0]$, $[1,1,1,0,\dots 0]$.

19.11 Udowodnić, że dla wektorów w $\mathbb{R}^3$ zachodzi $\langle \alpha\times\beta,\gamma\rangle = \langle \beta\times\gamma,\alpha\rangle$.

19.12 Udowodnić, że
a) $\alpha\times\beta \perp \alpha$ oraz $\alpha\times\beta\perp\beta$,
b) $|\alpha\times\beta|$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez α i β,
c) Układ wektorów $\alpha,\beta,\alpha\times\beta$ jest bazą dodatnio zorientowaną.

20 Orientacja, izometrie

20.1 Niech $\sigma \in \Sigma_n$ będzie permutacją zbioru n-elementowego. Wykazać, że przekształcenie zadane wzorem $f(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots x_{\sigma(n)})$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy permutacja jest parzysta.

20.2 Niech $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie rodziną izomorfizmów liniowych, która w sposób ciągły zależy od parametru $t \in [0, 1]$. Wykazać, że ϕ_0 zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy ϕ_1 zachowuje orientację.

20.3 Wykazać, że jeśli izomorfizm liniowy ϕ zachowuje orientację, to można znaleźć ciągłą rodzine izomorfizmów ϕ_t, $t \in [0, 1]$, taką że $\phi_1 = \phi$ i $\phi_0 = Id$.

20.4 Zbadać czy przekształcenie jest izometrią: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2, x_1 + x_2 - 2, x_3 + 5)$. Czy zachowuje orientację? Jakie ma punkty stałe? Jakie ma proste niezmiennicze? Jakie ma płaszczyzny niezmiennicze?

20.5 Znaleźć wzór analityczny na obrót $\mathbb{R}^3$ o $\frac{\pi}{3}$ wokół osi $lin(1, 1, 1)$.

20.6 Opisać (w wybranej przez siebie bazie) obrót wokól osi $lin(1, 1, 2)$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

20.7 Opisać wszystkie izometrie $\mathbb{R}^3$ (liniowe i afiniczne).

20.8 Opisać czym jest poniższe przekształcenie liniowe (obrót? symetria? a może coś innego?) [Proskuriakow str. 204, 1571-1573]

20.9 Opisać czym jest poniższe przekształcenie afiniczne (obrót? symetria z poślizgiem? a może coś innego?) [Kostrykin str. 151, Zad 6.3.23-26]

20.10 Niech ϕ i ψ będą izometriami. Wykazać, że $ker(\phi - \psi) \perp \ker(\phi + \psi)$.

21 Kwadryki, przekształcenia samosprzężone

21.1 Opisać typ kwadryki i znaleźć jej środek
$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 = 0$
$(x_1 - 2x_3 - 4)^2 - 2(x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_3 - \frac{1}{3})^2 = 12\frac{2}{3}$, śr. $[4\frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}]$

21.2 Zadania o kwadrykach: znajdowanie typu, środka i osi [Kostrykin str. 155-156]

21.3 Znaleźć oś symetrii paraboli $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + y = 8$.

21.4 Udowodnić, że środek symetrii kwadryki w $\mathbb{R}^n$ opisanej równaniem $Q(x) = 0$ można znaleźć rozwiązując układ równań $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots n$.

21.5 Dany jest stożek $x^2 + y^2 = z^2$. Opisać wszystkie możliwe przekroje stożka z płaszczyzną.

21.6 Znaleźć rodziny prostych pokrywające powierzchnię
a) hiperboloida jednopowlokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
b) paraboloida hiperboloczna $x^2 - y^2 = 2z$.

21.7 Znaleźć osie kwadryki $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$.
w.własne 4,4,-2

21.8 Wyznaczyć wartości własne i wektory własne przekształceń samosprzężonych [Kostrykin str. 128, 4.3.4].

21.9 Opisać kwadryki (podać typ i znaleźć ich osie) opisane równaniem $\langle \phi(x), x \rangle = 1$, gdzie ϕ jest przekształceniem z powyższego zadania.

21.10 Wykazać, że funkcje $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ stanowią układ ortonormalny wektorów własnych samosprzężonego operatora $\frac{d^2}{dx^2}$ w przestrzeni funkcji z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

21.11 Udowodnić, że jeśli ϕ i ψ są przekształceniami samosprzężonymi oraz są ze sobą przemienne, to $\phi\psi$ też jest samosprzężone. Podać kontrprzykład na to, że przemienność jest konieczna.

21.12 Niech ϕ będize przekształceniem samosprzężonym. Wykazać, że $ker\,\phi \perp im\,\phi$ oraz $ker\,\phi$ i $im\,\phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

15.3.2005