Zadania z GAL-u 2004/2005

Listopad 2004

1 Rozwiązać układy równań:

1.1 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ $-1/7, 3/7$

1.2 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$ $2, -1, 1$

1.3 $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$ $0, 2, -3$

1.4 $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$ $8/7, -1/7, -3/7$

1.5 $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$ $1, -2, 0, 2$

1.6 $\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$ $10, 3, 0, -1, 0$

1.7 $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$ sprzeczny

1.8 $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ $x = -1 - t$, $y = 1$, $z = 0$

1.9 $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$ $x = \frac{1}{7} - \frac{3}{7}z + s - t$, $y = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}z - s$

1.10 $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 7 & 8 & 1 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$ sprzeczny

1.11 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & -5 & 1 & 17 \\ 6 & 5 & 3 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -5 & -10 & 12 \end{array}\right]$ $y = 7/2 + s, z = -4 - 2x - s, t = 1/2$

1.12 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 1 & 5 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right]$ $x = -1 + t, y = 4 - t, z = 1 - t$

1.13 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$ $x = -5 + 3y + z + 2s, t = -2z$

1.14 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.15 Niech a, b, c będą trzema różnymi liczbami rzeczywistymi. Znaleźć wielomian kwadratowy $W(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, taki, że $W(a) = 7$, $W(b) = 4$ i $W(c) = 9$.

1.16 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & c & c \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.17 $\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & 1 \\ b & c & d & e & 1 \\ c & d & e & a & 1 \\ d & e & a & b & 1 \\ e & a & b & c & 1 \end{array}\right]$ dla jakich a, b c, d, $e \in \mathbb{R}$ układ ma niezerowe rozwiązanie? (Nie rozwiązywać.)

1.18 W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ powiedzieć czy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie / ma wiele rozwiązań / jest sprzeczny:

$$\begin{cases} ax + y + z = a - 1 \\ x + y + az = \\ x + ay + z = 1 - a \end{cases}$$

2 Ciała

2.1 Udowodnić, że w dowolnym ciele są prawdziwe następujące tożsamości
(i) $-(-x) = x$,
(ii) $-(x+y) = (-x) + (-y)$,
(iii) $(-x)y = -xy$,
(iv) $(x-y)z = xz - yz$, gdzie $x - y := x + (-y)$.

2.2 Niech $p > 1$ będzie liczbą naturalną. W zbiorze $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ definiujemy działania $a \oplus b = (a+b)\ mod\ p$ oraz $a \odot b = (a \cdot b)\ mod; p$. Znaleźć p dla których $(F_p, 0, 1, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

2.3 Niech $F = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Zdefiniować w F działania, tak by otrzymać ciało.

2.4 Sprawdzić łączność mnożenia na liczbach zespolonych.

2.5 Znaleźć element odwrotny do $a + bi \in \mathbb{C}$.

2.6 Skonstruować geometrycznie element odwrotny w $\mathbb{C}$.

3 Liczby zespolone

3.1 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
a) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,
b) $z^2 - 4z + 13 = 0$,
c) $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$,
d) $z^8 = 1$,
e) $z^{12} = 1$,
f) $z^7 = \overline{z}$,
g) $z^4 = (1-i)^4$,
h) $(z-1)^6 = (i-z)^6$,
i)* $z^5 = 1$.

3.2 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb spełniających warunek:
a) $Re(iz + 2) > 0$,
b) $(\overline{z-i})^2 = (z-i)^2$,
c) $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$,
d) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = 1$,
e) $arg(z^6) = \pi$,
f) $arg(\overline{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$,
g) $|z|^3 = iz^3$,
h) $im(iz^4 + 2) \geq 0$.

3.3 Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby
a) $-2 + 2i$,
b) $\sqrt{3} - i$,
c) $-5 + 5\sqrt{3}i$.

3.4 Obliczyć wyrażenia (wynik w postaci $a + bi$)
a) $(1-i)^{12}$,
b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$,
c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$.

3.5 Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić $\cos(7x)$ przez funkcje $\cos(x)$.

3.6 Obiczyć
a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$
(wsk. ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego),
b) $\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} - \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$.

4 Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

4.1 Niech $C(\mathbb{R})$ będzie zbiorem funckcji ciągłych $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniem dodawania i mnożeniem przez stałą. Sprawdzić, że $C(R)$ jest przestrzenią liniową.

4.2 Które podzbiory $C(\mathbb{R})$ są podprzestrzeniami liniowymi?
a) wielomiany?
b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
c) funkcje spełniające $f(1) = 0$?
d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
f) funkcje spełniające: f jest dwukrotnie różniczkowalna i $f = -f''$?
g) funkcje okresowe?
h) funkcje okresowe o okresie T?

4.3 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{F}_2)^3$? Opisać je równaniami.

4.4 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{F}_p)^n$?

4.5 Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozpiętej przez $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$? A wektor $(1, 4, 3)$?

4.6 Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej na wektorach

$$(i, 1, -i, -1),\ (i, -i, 1, -1),\ (1, 0, 0, -1)$$

spełnia warunek: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

4.7 Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory:
a) $(1, -1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 1),\ (2, 0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,
b) $(1, -1, 1, -1, 1),\ (1, 1, 0, 0, 3),\ (3, 1, 1, -1, 7),\ (0, 2, -1, 1, 2)$ w $\mathbb{R}^5$.

4.8 Wykazać, że przecięcie $V_1 \cap V_2$ dwu podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową.

4.9 Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V. Wykazać, że najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą $V_1 \cup V_2$ jest *suma algebraiczna* $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in V : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$.

4.10 Niech A, B_1, B_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V.
a) Czy prawdziwa jest formuła $A \cap (B_1 + B_2) = (A \cap B_1) + (A \cap B_2)$?
b) Załóżmy dodatkowo, że $B_1 \subset A$. Czy już będzie dobrze?
c) A może wystarczy $A \subset B_1$?

4.11 Znaleźć takie wartości $a \in \mathbb{F}$, by wektory $(a, 1, 0)$, $(1, a, 3)$, $(a, 1, 1) \in \mathbb{F}^3$ były liniowo zależne.

4.12 Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny podzbiór w przestrzeni funkcji $(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2\}$.

5 Układy wektorów, bazy

5.1 Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?
a) $(1, 1, 0),\ (1, 2, -3),\ (2, 4, 1)$ w $\mathbb{R}^3$;
b) $(1, 2, 1, 1),\ (2, -1, -1, 4),\ (5, 5, 2, 7)$ w $\mathbb{R}^4$;
c) $(3, 2, 1, -1),\ (5, -1, 1, 2),\ (7, 8, 1, -7),\ (1, -1, 1, 2)$ w $\mathbb{R}^4$.

5.2 Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?
a) $(3, 1, 1),\ (1, 0, 2),\ (0, 3, 2)$ w $\mathbb{R}^3$;
b) $(3, 1, 0, -2),\ (5, 2, 2, -1),\ (1, -1, 0, -2),\ (5, 1, 1, -3),\ (-7, -3, 1, 5),$ $(4, 1, -2, -5)$ w $\mathbb{R}^4$;
c) $(1, 1, 1)$, (a, b, c) , (a^2, b^2, c^2) w $\mathbb{R}^3$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

5.3 Znaleźć bazy przestrzeni liniowych rozpiętych na wektorach w zadaniach 5.1 i 5.2.

5.4 Znalźć bazy przestrzeni liniowych opisanych przez równania:
a) $x + y + z + t + s = 0$ w $\mathbb{R}^5$;
b) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = 0 \end{cases}$ w $\mathbb{R}^5$;
c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ w $\mathbb{R}^4$.

5.5 Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:
a) $f(1) = f(2) = 0$;
b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).

6 Układy wektorów, bazy II

6.1 Wykazać, że jeśli $char(\mathbb{F}) \neq 2$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $lin(v+w, v-w) = lin(v, w)$.

6.2 wyznaczyć wszystkie watrości parametru p, tak by układ $(2, p, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 3)$ był liniowo niezależny.

6.3 Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.
a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ α_1, α_2, $\alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.
c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2? Znaleźć tą kombinację.

6.4 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

6.5 Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.
b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

6.6 Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać $lin(\alpha_1, \alpha_2) \cap lin(\beta_1, \beta_2)$.

6.7 Dane dwie podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x & +2y & & -3w & = & 0 \\ x & +y & -2z & & = & 0 \end{cases}, \qquad W = \begin{cases} 3x & +y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & -z & -w & = & 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami $V + W$. Znaleźć wymiary przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

6.8 Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową. Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ można dopełnić do bazy wektorami z W wtedy i tulko wtedy gdy: 1) jest układem liniowo niezależnym oraz 2) $Lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + W = V$.

6.9 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbb{R}^4$.

6.10 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej W i wektor $(1, 1, 1, 2)$.

7 Sumy proste, przekształcenia

7.1 Niech $U, V \subset \mathbb{R}^n$ będą określone układami równań:

$$U = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \qquad V = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ orza wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na U równolegle do V.

7.2 W przestrzeni R^4 określamy podprzestrzenie

$$U = lin\{(1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1)\}, \qquad V = lin\{(-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1)\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4, 2, 4, 4)$ na U równolegle do V.

7.3 Niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi V. Załóżmy, że $\dim V < \infty$ oraz $\dim U + \dim W = \dim V$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
1) $V = U \oplus W$;
2) $V = U + W$;
3) $U \cap W = \{0\}$.

7.4 Niech $V = U \oplus W$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą U i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ będzie bazą W. Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ jest bazą V.

7.5 Znaleźć wzór na obrót $\mathbb{R}^3$ w płaszczyźnie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ o kąt $2\pi/3$.

7.6 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć $f(1, 1)$.

7.7 Niech $F : W \to V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3) w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W. Wyznaczyć macierz odwzorowania F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

7.8 Niech f będzie niezerową funkcją liniową $V \to \mathbb{K}$. Niech $U = ker\, f$. Wykazać, że $V = U \oplus lin\{v\}$ dla dowolniego $v \in V \setminus U$.

7.9 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \to V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej) takie, że
a) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,
b) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

7.10 Znalźć jądro i obraz przekształcenia $\phi : K[x] \to K[x]$, $\phi(f) = f - f'$

7.11 Niech $f_i : V_i \to V_{i+1}$ dla $i = 0, \ldots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $im\, f_i = ker\, f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.

8 Przekształcenia liniowe II, izomorfizmy

8.1 Określić taki izomorfizm $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, że $f(e_1 + 2e_2) = e_2 + e_3$.

8.2 Niech $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

8.3 Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzen liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n. (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \to M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T\left(\{a_{i,j}\}_{1 \le j,j \le n}\right) = \{a_{j,i}\}_{1 \le j,j \le n}\,.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

8.4 Rozważamy podprzestrzenie $W_k \subset \mathbb{K}^n$ dla $k = 1, 2 \ldots n$:

$$W_k = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}\,.$$

Opisać wszystkie f izomorfizmy $\mathbb{K}^n$ takie, że $f(W_k) \subset W_k$

8.5 Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

8.6 Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieję taki izomorfizm f przestrzeni V, że $f(W_1) = W_2$?

8.7 Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \to V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest przekształceniem J. Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbb{R}} V$ jest parzysty.

8.8 Dane przekształcenia $f : V \to W$ i $g : W \to V$. Załóżmy, że $f \circ g = Id_W$. Czy f jest izomorfizmem?

9 Macierze

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$.

9.1 Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

9.2 Dla $a, t \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} a & t & 0 \\ 0 & a & t \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

9.3 Znaleźć $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$a)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.4 Udowodnić że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$(A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\,.$$

Czy analogiczny wzór zachodzi dla $(A + B)^n$?

9.5 a) Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X\,.$$

b) Znaleźć macierze przemienne ze wszystkimi macierzami wymiaru 3×3.

9.6 Niech $\mathbf{T}$ będzie zbiorem macierzy diagonalnych 2×2 postaci $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dla pewnych elementów $a, b \in \mathbb{K}$. Znaleźć wszystkie macierze odwracalne $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające warunek:
$X \cdot A \cdot X^{-1} \in \mathbf{T}$ dla wszystkich $A \in \mathbf{T}$.

Macierz zamiany współrzędnych od bazy A do bazy B przestrzeni V: *macierz identyczności V w bazach A i B (wektory A wyrażamy jako kombinaje liniowe wektorów B i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).*

9.7 Niech $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (4, 1)$. Znaleźć macierz przejścia z bazy α_1, α_2 do bazy standardowej i ze standardowej do α_1, α_2. Niech $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (2, 1, 3)$, $\beta_3 = (1, 0, 5)$. Znaleźć macierz przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$ w bazach β_i i α_i. (Oznaczamy ją $M\phi_\alpha^\beta$.)

9.8 To samo dla $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_1 = (1, 4, 9)$; $\beta_1 = (1, 2)$, $\beta_2 = (3, 1)$ $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$

9.9 Pokazać. że transpozycja iloczynu jest równa iloczynowi transpozycji w odwrotnej kolejności.

10 Przekształcenia liniowe, zadania banalne

10.1 Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_1 = (1,0,0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znaleźć obraz i jądro ϕ.

10.2 Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

10.3 Wskazać izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający dwa warunki:
- $\phi(0,2,1) \in \{x + y + z = 0, x - y + 2z = 0\}$,
- $\phi(1,2,2) \in \{x - y + 2z = 0\}$.

10.4 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $lin\{(-1,2,1)\} = ker\,\phi$,
2) $(1,1,2) \in im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.5 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $(-1,2,1) \in ker\,\phi$,
2) $lin\{(1,1,2)\} = im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.6 Wykazać, że przekształcenie ϕ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\phi^2 = 0$ oraz $\dim(ker(\phi)) = 2$.

10.7 Wkazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.8 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^4 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.9 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^3 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.10 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $\phi^3 = Id$, $\phi(v) = v$ dla pewnego $v \neq 0$. Udowodnić, że $\phi = Id$. Czy to samo jest prawdą, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$?

10.11 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $(Id - \phi)^2 = Id - \phi$.

10.12 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $\phi_{|im\,\phi} = Id_{|im\,\phi}$.

10.13 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = ker\,\phi \oplus im\,\phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\,\phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\,\phi$.

10.14 Niech $S : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $S^2 = Id$. Zdefiniujmy

$$V_+ = \{v \in V : Sv = v\}, \qquad V_- = \{v \in V : Sv = -v\}.$$

Przyjmijmy $\phi = \frac{1}{2}(S + Id)$. Udowodnić, że ϕ jest rzutowaniem na podprzestrzeń V_+ wzdłuż V_-. Zdefiniować rzut na V_- za pomocą S.

11 Rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego

11.1 Znaleźć rzędy macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$ (2).

11.2 W zależności od parametru znaleźć rząd macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{pmatrix}$ $(p = 0, 2 \Rightarrow 2)$ b) $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{pmatrix}$ (2)

c) $\begin{pmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{pmatrix}$ $(p = 0 \Rightarrow 2)$

11.3 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$ (dim=2)

b) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$ $(\emptyset)$

11.4 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań w zależności od parametru

a) $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$ $(-4 \Rightarrow \emptyset,\ 1 \Rightarrow dim = 1)$

b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$ $(p = 1 \Rightarrow \emptyset,\ p = 2 \Rightarrow dim = 1)$

11.5 Dane są 4 punkty na płaszczyźnie (a_i, b_i) dla $i = 1,2,3,4$. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne aby przez te punkty przechodził okrąg.

11.6 To samo zadania dla 5 punktów w $\mathbb{R}^3$ i sfery?

11.7 Dany jest układ równań zadany przez macierz $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$, gdzie α_i, β są kolumnami. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie rozwiązaniem. Znaleźć rozwiązanie układu zadanego przez macierz:
a) $(\alpha_1 + a\alpha_i, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo a i i,
b) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a\alpha_i, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$ i i,
c) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|a\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$,
d) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta + a\alpha_i)$ dla pewngo a i i.

11.8 Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym oraz niech $\dim W \leq \dim V$. Wykazać, że istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to V$ takie, że $g \circ f = 0$ oraz

$$\dim Im(f) + \dim Im(g) = \dim W.$$

12 Endomorfizmy

Wyznaczniki, macierze odwrotne, diagonalizacja, postać Jordana

12.1 Znaleźć wyznaczniki macierzy - zadania z
a) Jurlewicz-Skoczylas [JuSk]: 3.9, 3.12, 3.14, str. 80-81;
b) Proskuriakow [Pro]: 279, 280,283, 284, 297, 312, 313, 318, 319, 321, 323, str. 35-41.

12.2 Wykazać, że $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det\, A \cdot det\, C$.

12.3 Tw. Kroneckera-Capellego: [JuSk], przykład 4.11 str. 91 i zad. 4.11 str. 108.

12.4 Zanając macierze A^{-1} i C^{-1} znaleźć macierz odwrotnaą do macierzy blokowej $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

12.5 Ciąg Fibonacciego: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Podać wzór na F_n.

12.6 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem liniowych przestrzeni rzeczywistych. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartoćią własną, to $\overline{\lambda}$ też jest wartością własą i $\dim V_\lambda = \dim V_{\overline{\lambda}}$.

12.7 Zdiagonalizować macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

12.8 Wykazać, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ diagonalizuje się.

12.9 Skonstruować przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takie, że
$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2).$$

12.10 Opisać wszystkie klasy sprzężoności rzeczywistych macierzy 2×2.

12.11 Czy macierze są podobne? Koźniewski [Koź] Zad 1, str 97.

12.12 Znaleźć bazę Jordana dla macierzy [Pro] 1530-1534, str. 200, [Koź] Zad 2, str 97.

12.13 Podnoszenie do wysokiej potęgi: [Koź] Zad. 4 (A_1 i A_3).

12.14 Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym takim, że $\phi^n = id$ to ϕ jest diagonalizowalne.

12.15 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni n-wymiarowej o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dla dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz $j \in \mathbb{N}$ niech $a_{i,j} = rz((\phi - \lambda_i Id)^j)$. Niech $b_{i,j}$ oznacza ilość klatek wymiaru j z wartością własną λ_i występujących w postaci Jordana przekształcenia ϕ. Wyrazić $b_{i,j}$ za pomocą $a_{i,j}$.

12.16 Znaleźć bazę Jordana dla przekształcenia zadanego przez macierz

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13 Przestrzeń sprzężona

13.1 Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Zanaleźć współrzędne f
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

13.2 Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

13.3 Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset \mathbb{K}^3$ by standardowy wektor sprężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

13.4 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, 3, 2, -3)$ i $(-3, 1, 2, 0)$. Przez $Anh(V) = \left\{f \in (\mathbb{R}^4)^* : \forall v \in V\ f(v) = 0\right\}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałow znikających na V (tzw. *anihilator*). Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.5 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.6 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 5\epsilon_1^* - 3\epsilon_2^* + \epsilon_3^*$ w bazie sprzężonej do bazy standardowej.
a) Napisać wzór na f.
b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do $\alpha_1 = (2, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_1 = (0, 1, 1)$.

13.7 Niech V będzie przestrzenią wielomianów zespolonch stopnia nie większego od 3. Definiujemy funkcjonały $\Phi_i \in V^*$ dla $i = 0, 1, 2, 3$
$$\Phi_i(f) = f^{(i)}(1)$$
(i-ta pochodna). Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,3} \subset V$, że Φ_i jest bazą sprzężoną, tzn $\alpha_i^* = \Phi_i$.

13.8 Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

13.9 Podać przykład bazy $\mathbb{R}^3$ taki, że $\epsilon_1^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

13.10 Niech $\Phi; \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ będzie dane wzorem
$$\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z)\,.$$
Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprężonego $\Phi^*; (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$ (przypomnienie: $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ dla $f \in (\mathbb{C}^4)^*$).

13.11 To samo dla $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y)$.

13.12 Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

13.13 Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \ldots f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \ldots f_n$ są liniowo niezależne wtedi i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) = \{0\}$.

13.14 Niech $L \subset V$, $\Phi : V \to W$. Wykazać, że
$$L \subset ker\, \Phi \iff im\, \Phi^* \subset Anh(L)\,.$$

14 Przestrzenie afiniczne

14.1 Znaleźć środek ciężkości układu punktów
a) $[1,0,0]$, $[0,2,1]$, $[1,0,1]$, $[1,-1,1]$ o wagach $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$
b) $[1,0]$, $[0,1]$, $[-1,-1]$, $[1,1]$ o wagach -3, -3, -3, 10

14.2 Czy $[0,0,0]$ jest środkiem ciężkości układu punktów $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1] \in \mathbb{K}^n$ dla dowolnego ciała?

14.3 Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a $A \subset E$ jej podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnej pary punktów $p, q \in A$ prosta $af(p,q) \subset A$. Czy A jest podprzestrzenią afiniczną?

14.4 Mówimy, że $p,q,r,s \in E$ jest równoległobokiem gdy $\omega(p,q) = -\omega(r,s)$. Udowodnić, że jeśli $char(\mathbb{K}) \neq 2$, to $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$.

14.5 Twierdzenie Menelausa. Niech $p_1, p_2, p_3 \in E$ oraz

$$q_1 = a_1p_2 + (1-a_1)p_3 \qquad q_2 = a_2p_3 + (1-a_2)p_1 \qquad q_3 = a_3p_1 + (1-a_3)p_2$$

dla $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Udowodnić, że q_1, q_2, q_3 są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $a_1a_2a_3 = (a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)$.

14.6 Znaleźć współrzędne barycentryczne punktu $[1,1,1]$ w bazie
a) $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$;
b) $[-1,-1,-1]$, $[2,0,0]$, $[0,2,0]$, $[0,0,2]$;
c) $[13,4,3]$, $[1,1,1]$, $[12,7,3]$, $[31,2,-1]$.

14.7 Czy punkty są w położeniu szczególnym
a) $[1,1,1]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$;
b) $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$;
c) $[1,2,1]$, $[3,0,1]$, $[2,2,0]$?
Jeśli tak, to znleźć maksymalne podukłady punktów w położeniu ogólnym.

14.8 Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni $\mathbb{K}^3$ opisanej równaniem $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$.

14.9 Znaleźć bazę punktową $af(L_1 \cup L_2) \subset \mathbb{K}^3$, gdzie $L_1 = \{[4,1,0] + t(2,3,-1) : \ t \in \mathbb{K}\}$, $L_2 = \{[2,-2,1] + t(1,0,1)\}$.

14.10 Znaleźć w $\mathbb{K}^3$ płaszczyznę równoległą do $P = \{x+2y+z = 6\}$ i przechodzącą przez punkt $[1,2,3]$.

14.11 Opisać płaszczyznę równoległą do prostych $\{[10,-2,13] + t(1,0,1)\}$, $\{[3,32,1] + t(0,1,0)\}$ i przechodzącą przez punkt $[2,\sqrt{7},\pi]$.

14.12 Opisać płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[1,1,1]$ i
a) zawierającą prostą $\{[1,0,0] + t(1,-1,1)\}$,
b) styczną do prostej $\{[1,0,0] + t(1,-1,1)\}$ i zawierającą punkt $[0,1,0]$.

14.13 Opisać równaniem płaszczyznę zawierającą $P \cap Q$ i punkt p.
a) $P = \{x = y+1\}$, $Q = \{y = z+1\}$, $p = [1,1,1]$
b) $P = \{x+2y-z = 3\}$, $Q = \{3x-y+2z = 2\}$, $p = [2,1,3]$.

14.14 Dana jest przestrzeń afiniczna wymiaru n, jej baza punktowa oraz $n+1$ punktów q_i. Niech $a_{i,0}, \ldots, a_{i,n}$ będą współrzednymi barycentrycznymi punktu q_i. Wykazać, że $det(a_{i,j}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy punkty są w położeniu szczególnym.

14.15 W $\mathbb{K}^5$ dane są dwie płaszczyzny i punkt (dane z proskuriakowa str 141, 6.1.20b). Znaleźć prostą przechodzącą przez ten punkt i przecinającą obie płaszczyzny. Znaleźć punkty przeciącia!

Odp: $L \cap P_1 = [1,-3,-2,2,0]$, $L \cap P_2 = [3,3,0,6,5]$.

15 Przekształcenia afiniczne

15.1

15.2 Czy istnieje taki izomorfizm afiniczny $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, że $\phi([0,0,0]) = \phi([0,0,1])$ oraz $\phi(L) = K$, gdzie $K = \{[0,1,0] + t(1,0,0) : \ t \in \mathbb{K}\}$ i $L = \{[0,0,1] + t(1,0,0) : \ t \in \mathbb{K}\}$?

15.3 Podac wzór przekształcenia $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanego na bazie punktowej dane z Kostrykina str 142, zad 6,3,1 a,d

Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $F(p_i) = q_i$, gdzie $p_0 = [2,1]$, $p_1 = [1,2]$, $p_2 = [1,1]$
a) $q_0 = [1,1]$, $q_1 = [1,2]$, $q_2 = [0,1]$
b) $q_0 = [4,1]$, $q_1 = [3,3]$, $q_2 = [2,1]$
c) $q_0 = [3,1]$, $q_1 = [3,2]$, $q_2 = [2,1]$.
Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia F.

15.4 [Kostrykin] 6.1.31, 6.1.33-34 str. 142-3,

16 Grupy przekształceń

16.1 Jeśli przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^2$ zachowuje 3 rózne proste, to jest mnożeniem przez skalar.

16.2 Niech zbiór X będzie zbiorem par prostych (liniowych) w $\mathbb{K}^2$. Grupa $G = GL(2, \mathbb{K})$ działa na X w sposób oczywisty. Opisać orbity.

16.3 To samo zadanie dla X który jest zbiorem trójek prostych.

16.4 To samo zadanie dla X który jest zbiorem trójek prostych w $\mathbb{K}^3$ oraz $G = GL(3, \mathbb{K})$.

16.5 To samo zadanie dla X który jest zbiorem trójek prostych afinicznych w $\mathbb{K}^2$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^2)$ jest grupą przekształceń afinicznych.

16.6 To samo zadanie dla X który jest zbiorem konfiguracji typu 2 proste + punkt w $\mathbb{K}^2$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^2)$.

16.7 To samo zadanie dla X który jest zbiorem konfiguracji typu 2 proste + punkt w $\mathbb{K}^3$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^3)$.

16.8 Grupa $G = \mathbb{Z}/2$ działa na $\mathbb{C}^2$ poprzez zamianę zmiennych: $\tau(x, y) = (y, x)$ dla $0 \neq \tau \in G$. Niech $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie zadane wzorem $F(x, y) = (x + y, xy)$. Wykazać, że F zadaje bijekcje pomiędzy $\mathbb{C}^2/G$ a $\mathbb{C}^2$. Czy to samo jest prawdziwe jeśli zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$?

16.9 Ustalamy liczbę naturalną n. Niech $G_n \subset GL(2, \mathbb{R})$ będzie grupą obrotów o kąty postaci $\frac{2k\pi}{n}$. Znaleźć funkcję wielomianową stałą na orbitach działania G_n, która zadaje bijekcję $\mathbb{R}^2/G_n$ z $\mathbb{R}^2$.

16.10 Grupa multiplikatywna $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ działa na $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ przez mnożenie $a \cdot v = av$. Iloraz $(\mathbb{K}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$ oznaczamy przez $\mathbb{P}^1$. Niech $L \subset \mathbb{R}^3$ będzie prostą afiniczną. Zbiór płaszczyzn zawierających L oznaczamy przez $X(L)$. Znaleźć bijekcję $X(L) \simeq \mathbb{P}^1$.

17 Formy 2-liniowe I

17.1 Wyznaczyć macierz formy dwuliniowej w bazie e'_i gdy dana jest macierz w bazie standardowej

a) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 3, 1, 4 \\ 5, 1, 6 \end{pmatrix}$ $e'_1 = e_1 + e_2,\ e'_2 = e_1 - e_2,\ e'_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$.

b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 2 \\ 2, 5, 6 \\ 2, 6, 9 \end{pmatrix}$ $e'_1 = e_1 - e_2,\ e'_2 = e_1 + 2e_2,\ e'_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

17.2 Zapisać formę a) z poprzedniego zadania w postaci sumy $F = A + S$, gdzie S jest symetryczną formą, a A jest antysymetryczną.

17.3 Niech V będzie przestrzenią funkcji różniczkowalnych na przedziale $[0, 1]$, zerujących się w 0 i 1. Niech $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$. Wykazać, że jest to forma antysymetryczna.

17.4 Niech $V = M(2 \times 2; \mathbb{K})$ będzie przestrzenią liniową macierzy. Definiujemy symetryczną formę 2-liniową $\phi(A, B) = -Tr(AB)$. Znaleźć:

a) $V^\perp = \{A \in V : \forall B \in V\ \phi(A, B) = 0\}$,

b) $I(V) = \{A \in V : \phi(A, A) = 0\}$ (wektory izotropowe),

c) wskazać maksymalne podprzestrzenie na których, ϕ jest dodatnio/ujemnie określona (dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

d) udzielić odpowiedzi a) i c) gdy $V = M(n \times n; \mathbb{K})$.

18 Iloczyny skalarne

18.1 Wybrać bazę przestrzeni $\{x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$. Niech ϕ będzie ograniczeniem iloczynu skalarnego do tej przestzeni. Znaleźć jego macierz w wybranej bazie. Znaleźć bazę ortonormalną.

18.2 Czy formy w zad 17.1 są iloczynami skalarnymi?

18.3 Czy forma zadana przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ jest iloczynem skalarnym? Jeśli nie, to zanaleźć wektory izotropowe, tzn takie, że $\phi(x,x)=0$.

18.4 a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A,B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej macierzy antysymetrycznych.
b) Wykazać, że $\phi(CA,CB) = \phi(A,B)$ jeśli C jest macierzą izometrii.

18.5 Udowodnić, że każdy ortogonalny układ niezerowych wektorów jest liniowo niezależny.

18.6 Niech $\dim W < \infty$ i $U, V \subset W$. Wykazać
a) $(V^\perp)^\perp = V$;
b) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;
c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$;
d) $0^\perp = W$ oraz $W^\perp = 0$.

18.7 Zastosować ortogonalizacje G-S do wektorow:
a) $(1,2,2,-1),\ (1,1,-5,3),\ (3,2,8,-7)$;
b) $(1,1,-1,-2),\ (5,8,-2,-3),\ (3,9,3,8)$;
c) $(2,1,3,-1),\ (7,4,3,-3),\ (1,1,-6,0),\ (5,7,7,8)$.

18.8 Znaleźć wzór na rzut ortogonalny na $\alpha^\perp$, gdzie α jest pierwszym wektorem z punktu a) 18.7.

18.9 Znaleźć wzór na symetrię prostokątna względem $lin\{\beta_1,\beta_2\}$, gdzie β_1,β_2 są dwoma pierwszymi wektorem z punktu b) 18.7.

18.10 Niech $P=\{x_1+2x_2-3x_3=6\}$, $Q=\{x_1+x_2+x_3=3\}$. Znalźć równanie $S_P(Q)$, gdzie S_P jest prostokątna symetrią względem płaszczyzny P.

18.11 Niech $L = \{[0,7,1,2]+t(0,1,-1,0)\}$, $K = \{[1,1,1,1]+t(1,0,0,-1)\}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4,1,3,1]$, która jest prostopadła do L i nie przecina K.

18.12 Znaleźć odległość punktu $[1,2,2]$ od płaszczyzny
$[-1,1,1]+lin\{(1,2,2),\ (1,1,-5)\}$.

18.13 Znaleźć odległość pomiędzy punktem $[-1,2,0]$ a prostą $[0,1,1]+t(1,-1,0)$.

18.14 Znaleźć odległość pomiędzy prostymi
$[1,0,-2]+t(0,1,1)$ i $[1,0,1]+t(1,-1,0)$.

18.15 Opisać wszystkie izometrie $\mathbb{R}^3$:
a) liniowe;
b) afiniczne.

18.16 Formy kwadratowe: sprowadzić do kanonicznej postaci formę
a) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;
b) dla powyższej formy znaleźć ortogonalny (ze względu na standardowy iloczyn skalarny) układ współrzędnych;
c) [Proskuriakow] 1243-1246

18.17 Znaleźć takie współrzędne $\mathbb{R}^2$, że forma $x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$ ma postać $-4u_1u_2$.

18.18 Znaleźć bazę ortogonalną (w iloczynie standardowym) taką, że dana forma kwadratowa ma postać kanoniczną: [Proskuriakow] 1248-1262

18.19 Czy formy kwadratowe są tego samego typu [Proskuriakow] 1237-1238.

19 Powtórzenie

19.1 Niech $L = \{[1,1,1]+t(1,0,0),\ t\in\mathbb{R}\}$ oraz $H=\{x_1+x_2+x_3=2\}$.
a) Podać wzór na rzut ϕ ma L wzdłuż H.
b) Dla jakiego $a\in\mathbb{R}$ obraz $\phi(af\{[1,2,3],[4,a,1]\})$ jest jednym punktem.

19.2 Dany funkcjonał dwuliniowy $\zeta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$. Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$ taka, że macierz funkcjonału ζ jest równa
a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

19.3 Dla jakich parametrów a forma dwuliniowa $\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ jest iloczynem skalarnym?

19.4 Dla jakich parametrów a przestrzenie $lin(3,1,1)$ i $\{x_1+x_2+x_3=0\}$ są prostopadłe ze względu na formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$?

19.5 Dany iloczyn skalarny wzorem $4x_1y_1+4x_2y_2+x_3y_3$ oraz

$$L = \begin{cases} 4x_2-x_3=2 \\ 2x_2+x_3=4 \end{cases} \qquad M = af\{[0,0,2],[1,1,0],[2,2,2]\}.$$

Znaleźć obraz prostej L przy symetrii prostokątnej względem M.

19.6 W $\mathbb{R}^4$ dana podprzestrzeń $V = lin\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}$
a) Wskazać bazy ortonormalne V i $V^\perp$.
b) Niech S będzie symetrią prostokątną względem V. Znaleźć $S(M)$, gdzie

$$M = \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

19.7 Niech $v_1,v_2,\dots v_n \in \mathbb{R}^k$, a h będzie odległością v_1 od $lin\{v_1,v_2,\dots v_{n-1}\}$. Udowodnić wzór na wyznaczniki Gramma:

$$G(v_1,v_2,\dots v_n) = h^2 G(v_1,v_2,\dots v_{n-1}).$$

19.8 Niech V będzie przestrzenią euklidesową wymiaru n. Niech S będzie sympleksem o wierzchołkach $p_0,p_1,\dots p_n$ takich, że $|p_i-p_j|=1$ dla $i\neq j$. Wyznaczyć długość wysokości sympleksu h_n. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} h_n$.

19.9 Obliczyć kąt, jaki tworzą płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $x_1+x_2=4$ i $x_1+x_3=17$.

19.10 Wyznaczyć odległość punktu $p=[1,1,\dots 1]\in\mathbb{R}^{100}$ od płaszczyzny rozpiętej na trzech punktach $[1,0,0,0\dots 0]$, $[1,1,0,0\dots 0]$, $[1,1,1,0,\dots 0]$.

19.11 Udowodnić, że dla wektorów w $\mathbb{R}^3$ zachodzi $\langle \alpha\times\beta,\gamma\rangle = \langle \beta\times\gamma,\alpha\rangle$.

19.12 Udowodnić, że
a) $\alpha\times\beta \perp \alpha$ oraz $\alpha\times\beta\perp\beta$,
b) $|\alpha\times\beta|$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez α i β,
c) Układ wektorów $\alpha,\beta,\alpha\times\beta$ jest bazą dodatnio zorientowaną.

20 Orientacja, izometrie

20.1 Niech $\sigma \in \Sigma_n$ będzie permutacją zbioru n-elementowego. Wykazać, że przekształcenie zadane wzorem $f(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots x_{\sigma(n)})$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy permutacja jest parzysta.

20.2 Niech $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie rodziną izomorfizmów liniowych, która w sposób ciągły zależy od parametru $t \in [0, 1]$. Wykazać, że ϕ_0 zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy ϕ_1 zachowuje orientację.

20.3 Wykazać, że jeśli izomorfizm liniowy ϕ zachowuje orientację, to można znaleźć ciągłą rodzine izomorfizmów ϕ_t, $t \in [0, 1]$, taką że $\phi_1 = \phi$ i $\phi_0 = Id$.

20.4 Zbadać czy przekształcenie jest izometrią: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2, x_1 + x_2 - 2, x_3 + 5)$. Czy zachowuje orientację? Jakie ma punkty stałe? Jakie ma proste niezmiennicze? Jakie ma płaszczyzny niezmiennicze?

20.5 Znaleźć wzór analityczny na obrót $\mathbb{R}^3$ o $\frac{\pi}{3}$ wokół osi $lin(1, 1, 1)$.

20.6 Opisać (w wybranej przez siebie bazie) obrót wokól osi $lin(1, 1, 2)$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

20.7 Opisać wszystkie izometrie $\mathbb{R}^3$ (liniowe i afiniczne).

20.8 Opisać czym jest poniższe przekształcenie liniowe (obrót? symetria? a może coś innego?) [Proskuriakow str. 204, 1571-1573]

20.9 Opisać czym jest poniższe przekształcenie afiniczne (obrót? symetria z poślizgiem? a może coś innego?) [Kostrykin str. 151, Zad 6.3.23-26]

20.10 Niech ϕ i ψ będą izometriami. Wykazać, że $ker(\phi - \psi) \perp \ker(\phi + \psi)$.

21 Kwadryki, przekształcenia samosprzężone

21.1 Opisać typ kwadryki i znaleźć jej środek
$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 = 0$
$(x_1 - 2x_3 - 4)^2 - 2(x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_3 - \frac{1}{3})^2 = 12\frac{2}{3}$, śr. $[4\frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}]$

21.2 Zadania o kwadrykach: znajdowanie typu, środka i osi [Kostrykin str. 155-156]

21.3 Znaleźć oś symetrii paraboli $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + y = 8$.

21.4 Udowodnić, że środek symetrii kwadryki w $\mathbb{R}^n$ opisanej równaniem $Q(x) = 0$ można znaleźć rozwiązując układ równań $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots n$.

21.5 Dany jest stożek $x^2 + y^2 = z^2$. Opisać wszystkie możliwe przekroje stożka z płaszczyzną.

21.6 Znaleźć rodziny prostych pokrywające powierzchnię
a) hiperboloida jednopowlokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
b) paraboloida hiperboloczna $x^2 - y^2 = 2z$.

21.7 Znaleźć osie kwadryki $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$.
w.własne 4,4,-2

21.8 Wyznaczyć wartości własne i wektory własne przekształceń samosprzężonych [Kostrykin str. 128, 4.3.4].

21.9 Opisać kwadryki (podać typ i znaleźć ich osie) opisane równaniem $\langle \phi(x), x \rangle = 1$, gdzie ϕ jest przekształceniem z powyższego zadania.

21.10 Wykazać, że funkcje $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ stanowią układ ortonormalny wektorów własnych samosprzężonego operatora $\frac{d^2}{dx^2}$ w przestrzeni funkcji z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

21.11 Udowodnić, że jeśli ϕ i ψ są przekształceniami samosprzężonymi oraz są ze sobą przemienne, to $\phi\psi$ też jest samosprzężone. Podać kontrprzykład na to, że przemienność jest konieczna.

21.12 Niech ϕ będize przekształceniem samosprzężonym. Wykazać, że $ker\,\phi \perp im\,\phi$ oraz $ker\,\phi$ i $im\,\phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

22 Nowe zadania

22.1 Niech $\langle -, - \rangle$ będzie formą kwadratową zdefiniowaną na przestrzeni macierzy $n \times m$ formułą $\langle A, B \rangle = Tr(A \cdot B^T)$. Wykazać, że to jest iloczyn skalarny.

22.2 W powyższym iloczynie skalarnym dla $n = m$ znaleźć wzór na rzut prostopadły na przestrzeń macierzy symetrycznych.

22.3 Niech będą dane dwie przestrzenie V i W z iloczynami skalarnymi. W przestrzeni przekształceń liniowych $L(V, W)$ wprowadzamy formę 2-liniową wzorem $\Theta(\phi, \psi) = tr(\phi \circ \psi^*)$. Wykazać, że Θ jest iloczynem skalarnym.

22.4 Niech Θ będzie jak wyżej. Oraz niech A i B będą izometriami przestrzeni V i W odpowiednio. Niech $\alpha : L(V, W) \to L(V, W)$ będzie przekształceniem danym wzorem $\alpha(\phi) = B\phi A^{-1}$. Wykazać, że α jest izometrią.

22.5 To samo polecenie, ale nie zakładamy, że formy 2-liniowe na V i W są iloczynami skalarnymi tylko, że są niezdegenerowane i symetryczne. Pytamy, czy Θ jest niezdegenerowane i symetryczne i czy α zachowuje Θ.

22.6 Udowodnić formułę na rzut na $(lina)^\perp$ w $\mathbb{R}^3$

$$\pi(b) = b \times (a \times b)/|b|^2 .$$

22.7 Udowodnić formuły w $\mathbb{R}^3$:
- $(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2|b|^2$
- $(a + b) \cdot [(a + c) \times b] = -a \cdot (b \times c)$
- $(a + 2b - c) \cdot [(a - b) \times (a - b - c)] = 3a \cdot (b \times c)$
- $(a \times b) \times (c \times d) = [(a \times c) \cdot d]b - [(b \times c) \cdot d]a$
- $a \times (b \times c) - (a \times b) \times c = (b \cdot c)a - (a \cdot b)c$

22.8 Zadania o kwadrykach: [Kostrykin] str 155, zad 6.4.20 i dalej.

Przekształcenia rzutowe K^n (nie wszędzie określone).

22.9 Niech $f(x, y) = (1/x, y/x)$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

22.10 Niech $f(x, y) = (1/(x - 1), y/(x - 1))$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

22.11 Niech A będzie odwracalną macierzą wymiaru $n + 1$. Określamy przekształcenie $\mathbb{K}^n$ wzorem $f_A(x_1, \ldots, x_n) = (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0)$, gdzie $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T = A(1, x_1, \ldots x_n)^T$. Wykazać, że $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

22.12 Wykazać, że f_A przeprowadza kwadryki w $\mathbb{K}^n$ na kwadryki.

22.13 Znaleźć przekształcenie rzutowe $\mathbb{R}^3$ przeprowadzające sfrę na paraboloidę hiperboliczną (tzn. siodło).