8 Przekształcenia liniowe II, izomorfizmy

8.1 Określić taki izomorfizm $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, że $f(e_1 + 2e_2) = e_2 + e_3$.

8.2 Niech $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

8.3 Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzen liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n. (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \to M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T\left(\{a_{i,j}\}_{1 \le j,j \le n}\right) = \{a_{j,i}\}_{1 \le j,j \le n}\,.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

8.4 Rozważamy podprzestrzenie $W_k \subset \mathbb{K}^n$ dla $k = 1, 2 \ldots n$:

$$W_k = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}\,.$$

Opisać wszystkie f izomorfizmy $\mathbb{K}^n$ takie, że $f(W_k) \subset W_k$

8.5 Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

8.6 Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieję taki izomorfizm f przestrzeni V, że $f(W_1) = W_2$?

8.7 Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \to V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest przekształceniem J. Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbb{R}} V$ jest parzysty.

8.8 Dane przekształcenia $f : V \to W$ i $g : W \to V$. Załóżmy, że $f \circ g = Id_W$. Czy f jest izomorfizmem?

9 Macierze

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$.

9.1 Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

9.2 Dla $a, t \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} a & t & 0 \\ 0 & a & t \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

9.3 Znaleźć $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$a)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.4 Udowodnić że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$(A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\,.$$

Czy analogiczny wzór zachodzi dla $(A + B)^n$?

9.5 a) Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X\,.$$

b) Znaleźć macierze przemienne ze wszystkimi macierzami wymiaru 3×3.

9.6 Niech $\mathbf{T}$ będzie zbiorem macierzy diagonalnych 2×2 postaci $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dla pewnych elementów $a, b \in \mathbb{K}$. Znaleźć wszystkie macierze odwracalne $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające warunek:
$X \cdot A \cdot X^{-1} \in \mathbf{T}$ dla wszystkich $A \in \mathbf{T}$.

Macierz zamiany współrzędnych od bazy A do bazy B przestrzeni V: *macierz identycznoci V w bazach A i B (wektory A wyrażamy jako kombinaje liniowe wektorów B i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).*

9.7 Niech $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (4, 1)$. Znaleźć macierz przejścia z bazy α_1, α_2 do bazy standardowej i ze standardowej do α_1, α_2. Niech $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (2, 1, 3)$, $\beta_3 = (1, 0, 5)$. Znaleźć macierz przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$ w bazach β_i i α_i. (Oznaczamy ją $M\phi^{\beta}_{\alpha}$.)

9.8 To samo dla $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_1 = (1,4,9)$; $\beta_1 = (1,2)$, $\beta_2 = (3,1)$ $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$

9.9 Pokazać. że transpozycja iloczynu jest równa iloczynowi transpozycji w odwrotnej kolejności.

10 Przekształcenia liniowe, zadania banalne

10.1 Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_1 = (1,0,0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znaleźć obraz i jądro ϕ.

10.2 Znaleźć przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

10.3 Znaleźć izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający dwa warunki:
- $\phi(0,2,1) \subset \{x+y+z=0, x-y+2z=0\}$,
- $\phi(1,2,2) \subset \{x-y+2z=0\}$.

10.4 Znałeć przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $ker\,\phi = lin(-1,2,1)$, $(1,1,2) \in im\,\phi$, $\phi^3 = 0$.

10.5 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^4 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.6 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^3 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.7 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $\phi^3 = Id$, $\phi(v) = v$ dla pewnego $v \neq 0$. Udowodnić, że $\phi = Id$. Czy to samo jest prawdą, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$?

10.8 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $(Id - \phi)^2 = Id - \phi$.

10.9 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $\phi_{|im\,\phi} = Id_{|im\,\phi}$.

10.10 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = ker\,\phi \oplus im\,\phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\,\phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\,\phi$.

10.11 Niech $S : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $S^2 = Id$. Zdefiniujmy

$$V_+ = \{v \in V : Sv = v\}, \qquad V_- = \{v \in V : Sv = -v\}.$$

Przyjmijmy $\phi = \frac{1}{2}(S + Id)$. Udowodnić, że ϕ jest rzutowaniem na podprzestrzeń V_+ wzdłuż V_-. Zdefiniować rzut na V_- za pomocą S.