4 Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

4.1 Niech $C(\mathbf{R})$ będzie zbiorem funckcji ciągłych $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ z działaniem dodawania i mnożeniem przez stałą. Sprawdzić, że $C(R)$ jest przestrzenią liniową.

4.2 Które podzbiory $C(\mathbf{R})$ są podprzestrzeniami liniowymi?
a) wielomiany?
b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
c) funkcje spełniające $f(1) = 0$?
d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbf{R}$?
e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
f) funkcje spełniające: f jest dwukrotnie różniczkowalna i $f = -f''$?
g) funkcje okresowe?
h) funkcje okresowe o okresie T?

4.3 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbf{F}_2)^3$? Opisać je równaniami.

4.4 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbf{F}_p)^n$?

4.5 Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $\mathbf{R}^3$ rozpiętej przez $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$? A wektor $(1, 4, 3)$?

4.6 Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbf{C}^4$ rozpiętej na wektorach

$$(i, 1, -i, -1),\ (i, -i, 1, -1),\ (1, 0, 0, -1)$$

spełnia warunek: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

4.7 Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory:
a) $(1, -1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 1),\ (2, 0, 1, 1)$ w $\mathbf{R}^4$,
b) $(1, -1, 1, -1, 1),\ (1, 1, 0, 0, 3),\ (3, 1, 1, -1, 7),\ (0, 2, -1, 1, 2)$ w $\mathbf{R}^5$.

4.8 Wykazać, że przecięcie $V_1 \cap V_2$ dwu podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową.

4.9 Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V. Wykazać, że najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą $V_1 \cup V_2$ jest *suma algebraiczna* $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in V : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$.

4.10 Niech A, B_1, B_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V.
a) Czy prawdziwa jest formuła $A \cap (B_1 + B_2) = (A \cap B_1) + (A \cap B_2)$?
b) Załóżmy dodatkowo, że $B_1 \subset A$. Czy już będzie dobrze?
c) A może wystarczy $A \subset B_1$?

4.11 Znaleźć takie wartości $a \in \mathbf{F}$, by wektory $(a, 1, 0)$, $(1, a, 3)$, $(a, 1, 1) \in \mathbf{F}^3$ były liniowo zależne.

4.12 Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny podzbiór w przestrzeni funkcji $(\mathbf{F}_2)^{\mathbf{N}} = \{f : \mathbf{N} \to \mathbf{F}_2\}$.

5 Układy wektorów, bazy

5.1 Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?
a) $(1, 1, 0),\ (1, 2, -3),\ (2, 4, 1)$ w $\mathbf{R}^3$;
b) $(1, 2, 1, 1),\ (2, -1, -1, 4),\ (5, 5, 2, 7)$ w $\mathbf{R}^4$;
c) $(3, 2, 1, -1),\ (5, -1, 1, 2),\ (7, 8, 1, -7),\ (1, -1, 1, 2)$ w $\mathbf{R}^4$.

5.2 Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?
a) $(3, 1, 1),\ (1, 0, 2),\ (0, 3, 2)$ w $\mathbf{R}^3$;
b) $(3, 1, 0, -2),\ (5, 2, 2, -1),\ (1, -1, 0, -2),\ (5, 1, 1, -3),\ (-7, -3, 1, 5),$ $(4, 1, -2, -5)$ w $\mathbf{R}^4$;
c) $(1, 1, 1)\ , (a, b, c)\ , (a^2, b^2, c^2)$ w $\mathbf{R}^3$ dla $a,\ b\ c \in \mathbf{R}$.

5.3 Znaleźć bazy przestrzeni liniowych rozpiętych na wektorach w zadaniach 5.1 i 5.2.

5.4 Znalźć bazy przestrzeni liniowych opisanych przez równania:
a) $x + y + z + t + s = 0$ w $\mathbf{R}^5$;
b) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = 0 \end{cases}$ w $\mathbf{R}^5$;
c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ w $\mathbf{R}^4$.

5.5 Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:
a) $f(1) = f(2) = 0$;
b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).

6 Układy wektorów, bazy II

6.1 Wykazać, że jeśli $char(\mathbf{F}) \neq 2$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $lin(v + w, v - w) = lin(v, w)$.

6.2 wyznaczyć wszystkie watrości parametru p, tak by układ $(2, p, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 3)$ był liniowo niezależny.

6.3 Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.
a) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ układ α_1, α_2, $\alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}^3$?
b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.
c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2? Znaleźć tą kombinację.

6.4 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

6.5 Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbf{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.

b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

6.6 Dane wektory w $\mathbf{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać $lin(\alpha_1, \alpha_2) \cap lin(\beta_1, \beta_2)$.

6.7 Dane dwie podprzestrzenie w $\mathbf{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x & +2y & & -3w & = & 0 \\ x & +y & -2z & & = & 0 \end{cases}, \qquad W = \begin{cases} 3x & +y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & -z & -w & = & 0 \end{cases}$$

Opisać $V + W$.

6.8 Niech $V = lin((2, 4, 1, 2), (1, -1, 1, -2), (4, 2, 3, -2)) \subset \mathbf{R}^4$ oraz niech W będzie zadane równaniami:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Znaleźć wymiar przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

7 Sumy proste, przekształcenia

7.1 Niech U, $V \subset \mathbf{R}^n$ będą określone układami równań:

$$U = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \qquad V = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Wykazać, że $\mathbf{R}^n = U \oplus V$ orza wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na U równolegle do V.

7.2 W przestrzeni R^4 określamy podprzestrzenie

$$U = lin\{(1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1)\}, \qquad V = lin\{(-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1)\}.$$

Wykazać, że $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4, 2, 4, 4)$ na U równolegle do V.

7.3 Znaleźć wzór na obrót $\mathbf{R}^3$ w płaszczyźnie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ o kąt $2\pi/3$.

7.4 Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć $f(1, 1)$.

7.5 Niech $F : W \to V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3) w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W. Wyznaczyć macierz odwzorowania F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

7.6 Niech f będzie niezerową funkcją liniową n V. Niech $U = ker\, f$. Wykazać, że $V = U \oplus lin\{v\}$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

7.7 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \to V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej) takie, że

a) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,

b) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

7.8 Znalźć jądro i obraz przekształcenia $\phi : K[x] \to K[x]$, $\phi(f) = f - f'$

7.9 Niech $f_i : V_i \to V_{i+1}$ dla $i = 0, \ldots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $im\, f_i = ker\, f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.

http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal