22 Nowe zadania

22.1 Niech $\langle -, - \rangle$ będzie formą kwadratową zdefiniowaną na przestrzeni macierzy $n \times m$ formułą $\langle A, B \rangle = Tr(A \cdot B^T)$. Wykazać, że to jest iloczyn skalarny.

22.2 W powyższym iloczynie skalarnym dla $n = m$ znaleźć wzór na rzut prostopadły na przestrzeń macierzy symetrycznych.

22.3 Niech będą dane dwie przestrzenie V i W z iloczynami skalarnymi. W przestrzeni przekształceń liniowych $L(V, W)$ wprowadzamy formę 2-liniową wzorem $\Theta(\phi, \psi) = tr(\phi \circ \psi^*)$. Wykazać, że Θ jest iloczynem skalarnym.

22.4 Niech Θ będzie jak wyżej. Oraz niech A i B będą izometriami przestrzeni V i W odpowiednio. Niech $\alpha : L(V, W) \to L(V, W)$ będzie przekształceniem danym wzorem $\alpha(\phi) = B\phi A^{-1}$. Wykazać, że α jest izometrią.

22.5 To samo polecenie, ale nie zakładamy, że formy 2-liniowe na V i W są iloczynami skalarnymi tylko, że są niezdegenerowane i symetryczne. Pytamy, czy Θ jest niezdegenerowane i symetryczne i czy α zachowuje Θ.

22.6 Udowodnić formułę na rzut na $(lina)^\perp$ w $\mathbb{R}^3$

$$\pi(b) = b \times (a \times b)/|b|^2 .$$

22.7 Udowodnić formuły w $\mathbb{R}^3$:
- $(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2|b|^2$
- $(a + b) \cdot [(a + c) \times b] = -a \cdot (b \times c)$
- $(a + 2b - c) \cdot [(a - b) \times (a - b - c)] = 3a \cdot (b \times c)$
- $(a \times b) \times (c \times d) = [(a \times c) \cdot d]b - [(b \times c) \cdot d]a$
- $a \times (b \times c) - (a \times b) \times c = (b \cdot c)a - (a \cdot b)c$

22.8 Zadania o kwadrykach: [Kostrykin] str 155, zad 6.4.20 i dalej.

Przekształcenia rzutowe K^n (nie wszędzie określone).

22.9 Niech $f(x, y) = (1/x, y/x)$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

22.10 Niech $f(x, y) = (1/(x - 1), y/(x - 1))$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

22.11 Niech A będzie odwracalną macierzą wymiaru $n + 1$. Określamy przekształcenie $\mathbb{K}^n$ wzorem $f_A(x_1, \ldots, x_n) = (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0)$, gdzie $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T = A(1, x_1, \ldots x_n)^T$. Wykazać, że $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

22.12 Wykazać, że f_A przeprowadza kwadryki w $\mathbb{K}^n$ na kwadryki.

22.13 Znaleźć przekształcenie rzutowe $\mathbb{R}^3$ przeprowadzające sfrę na paraboloidę hiperboliczną (tzn. siodło).

18.5.2005