1 Ciała

1.1 Udowodnić, że w dowolnym ciele są prawdziwe następujące tożsamości
(i) $-(-x) = x$,
(ii) $-(x+y) = (-x) + (-y)$,
(iii) $(-x)y = -xy$,
(iv) $(x-y)z = xz - yz$, gdzie $x - y := x + (-y)$.

1.2 Niech $p > 1$ będzie liczbą naturalną. W zbiorze $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ definiujemy działania $a \oplus b = (a+b) \ mod \ p$ oraz $a \odot b = (a \cdot b) \ mod; p$. Znaleźć p dla których $(F_p, 0, 1, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

1.3 Niech $F = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Zdefiniować w F działania, tak by otrzymać ciało.

1.4 Sprawdzić łączność mnożenia na liczbach zespolonych.

1.5 Znaleźć element odwrotny do $a + bi \in \mathbf{C}$.

1.6 Skonstruować geometrycznie element odwrotny w $\mathbf{C}$.

2 Liczby zespolone

2.1 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
a) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,
b) $z^2 - 4z + 13 = 0$,
c) $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$,
d) $z^8 = 1$,
e) $z^{12} = 1$,
f) $z^7 = \overline{z}$,
g) $z^4 = (1-i)^4$,
h) $(z-1)^6 = (i-z)^6$.

2.2 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb spełniających warunek:
a) $Re(iz + 2) > 0$,
b) $(\overline{z-i})^2 = (z-i)^2$,
c) $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$,
d) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = 1$,
e) $arg(z^6) = \pi$,
f) $arg(\overline{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$,
g) $|z|^3 = iz^3$.

2.3 Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby
a) $-2 + 2i$,
b) $\sqrt{3} - i$,
c) $-5 + 5\sqrt{3}i$.

2.4 Obiliczyć wyrażenia (wynik w postaci $a + bi$)
a) $(1-i)^{12}$,
b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$,
c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$.

2.5 Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić $\cos(7x)$ przez funkcje $\cos(x)$.

2.6 Obiczyć
a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$ (wsk. ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego),
b) $\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} - \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$.