10 Przekształcenia liniowe, zadania banalne

10.1 Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_1 = (1,0,0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znaleźć obraz i jądro ϕ.

10.2 Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

10.3 Wskazać izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający dwa warunki:
- $\phi(0,2,1) \in \{x + y + z = 0, x - y + 2z = 0\}$,
- $\phi(1,2,2) \in \{x - y + 2z = 0\}$.

10.4 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $lin\{(-1,2,1)\} = ker\,\phi$,
2) $(1,1,2) \in im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.5 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $(-1,2,1) \in ker\,\phi$,
2) $lin\{(1,1,2)\} = im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.6 Wykazać, że przekształcenie ϕ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\phi^2 = 0$ oraz $\dim(ker(\phi)) = 2$.

10.7 Wkazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.8 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^4 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.9 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^3 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.10 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $\phi^3 = Id$, $\phi(v) = v$ dla pewnego $v \neq 0$. Udowodnić, że $\phi = Id$. Czy to samo jest prawdą, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$?

10.11 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $(Id - \phi)^2 = Id - \phi$.

10.12 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $\phi_{|im\,\phi} = Id_{|im\,\phi}$.

10.13 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = ker\,\phi \oplus im\,\phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\,\phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\,\phi$.

10.14 Niech $S : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $S^2 = Id$. Zdefiniujmy

$$V_+ = \{v \in V : Sv = v\}, \qquad V_- = \{v \in V : Sv = -v\}.$$

Przyjmijmy $\phi = \frac{1}{2}(S + Id)$. Udowodnić, że ϕ jest rzutowaniem na podprzestrzeń V_+ wzdłuż V_-. Zdefiniować rzut na V_- za pomocą S.

11 Rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego

11.1 Znaleźć rzędy macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$ (2).

11.2 W zależności od parametru znaleźć rząd macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{pmatrix}$ $(p = 0, 2 \Rightarrow 2)$ b) $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{pmatrix}$ (2)

c) $\begin{pmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{pmatrix}$ $(p = 0 \Rightarrow 2)$

11.3 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$ (dim=2)

b) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$ $(\emptyset)$

11.4 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań w zależności od parametru

a) $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$ $(-4 \Rightarrow \emptyset,\ 1 \Rightarrow dim = 1)$

b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$ $(p = 0 \Rightarrow \emptyset,\ p = 2 \Rightarrow dim = 1)$

11.5 Dane są 4 punkty na płaszczyźnie (a_i, b_i) dla $i = 1,2,3,4$. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne aby przez te punkty przechodził okrąg.

11.6 To samo zadania dla 5 punktów w $\mathbb{R}^3$ i sfery?

11.7 Dany jest układ równań zadany przez macierz $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$, gdzie α_i, β są kolumnami. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie rozwiązaniem. Znaleźć rozwiązanie układu zadanego przez macierz:
a) $(\alpha_1 + a\alpha_i, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo a i i,
b) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a\alpha_i, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$ i i,
c) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|a\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$,
d) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta + a\alpha_i)$ dla pewngo a i i.

11.8 Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym oraz niech $\dim W \leq \dim V$. Wykazać, że istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to V$ takie, że $g \circ f = 0$ oraz

$$\dim Im(f) + \dim Im(g) = \dim W.$$

12 Endomorfizmy

Wyznaczniki, macierze odwrotne, diagonalizacja, postać Jordana

12.1 Znaleźć wyznaczniki macierzy - zadania z
a) Jurlewicz-Skoczylas [JuSk]: 3.9, 3.12, 3.14, str. 80-81;
b) Proskuriakow [Pro]: 279, 280,283, 284, 297, 312, 313, 318, 319, 321, 323, str. 35-41.

12.2 Wykazać, że $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det\, A \cdot det\, C$.

12.3 Tw. Kroneckera-Capellego: [JuSk], przykład 4.11 str. 91 i zad. 4.11 str. 108.

12.4 Zanając macierze A^{-1} i C^{-1} znaleźć macierz odwrotnaą do macierzy blokowej $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

12.5 Ciąg Fibonacciego: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Podać wzór na F_n.

12.6 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem liniowych przestrzeni rzeczywistych. Wykazać, że jeli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartoćią własną, to $\overline{\lambda}$ też jest wartością własą i $\dim V_\lambda = \dim V_{\overline{\lambda}}$.

12.7 Zdiagonalizować macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

12.8 Skonstrować przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takie, że
$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2).$$

12.9 Opisać wszystkie klasy sprzeżoności rzeczywistych macierzy 2×2.

12.10 Czy macierze są podobne? Koźniewski [Koź] Zad 1, str 97.

12.11 Znaleźć bazę Jordana dla macierzy [Pro] 1530-1535, (bez 1532!) str. 200, [Koź] Zad 2, str 97.

12.12 Podnoszenie do wysokiej potęgi: [Koź] Zad. 4 (A_1 i A_3).

12.13 Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym takim, że $\phi^n = id$ to ϕ jest diagonalizowalne.

12.14 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni n-wymiarowej o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dla dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz $j \in \mathbb{N}$ niech $a_{i,j} = rz((\phi - \lambda_i Id)^j)$. Niech $b_{i,j}$ oznacza ilość klatek wymiaru j z wartością własną λ_i występujących w postaci Jordana przekształcenia ϕ. Wyrazić $b_{i,j}$ za pomocą $a_{i,j}$.

12.15 Znaleźć bazę Jordana dla przekształcenia zadanego przez macierz

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13 Przestrzeń sprzężona

13.1 Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Zanaleźć współrzędne f
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

13.2 Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

13.3 Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset \mathbb{K}^3$ by standardowy wektor sprężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

13.4 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, 3, 2, -3)$ i $(-3, 1, 2, 0)$. Przez $Anh(V) = \left\{f \in (\mathbb{R}^4)^* : \forall v \in V\ f(v) = 0\right\}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałow znikających na V (tzw. *anihilator*). Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.5 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.6 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 5\epsilon_1^* - 3\epsilon_2^* + \epsilon_3^*$ w bazie sprzężonej do bazy standardowej.
a) Napisać wzór na f.
b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do $\alpha_1 = (2, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_1 = (0, 1, 1)$.

13.7 Niech V będzie przestrzenią wielomianów zespolonch stopnia nie większego od 3. Definiujemy funkcjonały $\Phi_i \in V^*$ dla $i = 0, 1, 2, 3$
$$\Phi_i(f) = f^{(i)}(1)$$
(i-ta pochodna). Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,3} \subset V$, że Φ_i jest bazą sprzężoną, tzn $\alpha_i^* = \Phi_i$.

13.8 Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

13.9 Podać przykład bazy $\mathbb{R}^3$ taki, że $\epsilon^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

13.10 Niech $\Phi; \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ będzie dane wzorem
$$\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z)\,.$$
Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprężonego $\Phi^*; (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$ (przypomnienie: $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ dla $f \in (\mathbb{C}^4)^*$).

13.11 To samo dla $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y)$.

13.12 Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

13.13 Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \ldots f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \ldots f_n$ są liniowo niezależne wtedi i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) = \{0\}$.

13.14 Niech $L \subset V$, $\Phi : V \to W$. Wykazać, że
$$L \subset ker\, \Phi \iff im\, \Phi^* \subset Anh(L)\,.$$