Całkowanie w dziedzinie zespolonej II

9.1. Twierdzenie o residuach

Niech Γ będzie brzegiem obszaru ograniczonego $\Omega \subset \mathbb{C}$, złożonym z jednej krzywej Jordana kawałami gładkiej lub układu takich krzywych zorientowanych dodatnio względem wnętrza Ω.

TWIERDZENIE 18. *Jeśli f jest funkcją holomorficzną na $\Omega \cup \Gamma$, z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych odosobnionych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ leżących wewnątrz Γ, to*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f, z_k].$$

9.1.A. Zadania łatwe

9.1.A.1. Wiedząc, że okrąg $C(i;2)$ jest zorientowany dodatnio, obliczyć całkę

$$I = \oint_{C(i;2)} \frac{z+3}{z^2+4}\,dz.$$

9.1.A.2. Niech

$$I(\Gamma) = \oint_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}.$$

Wyznaczyć wartość tej całki, gdy

(a) Γ jest dodatnio zorientowanym brzegiem prostokąta o wierzchołkach $-i$, $4-i$, $4+i$, i,

(b) Γ to dodatnio zorientowany okrąg $C(2)$.

9.1.A.3. Załóżmy, że okrąg $C(1;r)$ jest zorientowany dodatnio. Czy wartość całki $\oint_{C(1;r)} \frac{3+z}{(1-z)^2}\,dz$ zależy od wyboru $r > 0$?

9.1.A.4. Obliczyć całki:

(a) $I_1 = \oint_\Gamma \left(z^2 e^{\frac{1}{\pi z}} - \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4}\right) dz$, **(b)** $I_2 = \oint_\Gamma e^{\frac{2}{z-2}}\,dz$,

wiedząc, że Γ to dodatnio zorientowany brzeg elipsy o równaniu $4(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 16$.

9.1.A.5. Obliczyć całkę

$$\oint_{|z|=2} e^{e^{\frac{1}{z}}}\,dz,$$

w zależności od orientacji okręgu $C(2)$.

9.1.A.6. Wyznaczyć całkę

$$I = \frac{1}{\pi i} \oint_\Gamma \frac{dz}{\sin^3 z},$$

wiedząc, że Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem $C(1)$.

9.1.A.7. Obliczyć całkę $\oint_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym kwadratem o wierzchołkach $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

9.1.A.8. Niech liczba $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ będzie dowolnie ustalona. Wykazać, że

$$\int_0^\pi \operatorname{tg}(t+ai)\,dt = \begin{cases} i\pi, & \text{dla } a > 0, \\ -i\pi, & \text{dla } a < 0. \end{cases}$$

9.1.A.9. Niech $C(1)$ będzie dodatnio zorientowanym okręgiem $|z| = 1$. Wyznaczyć całkę

$$I_n(a,b) = \oint_{C(1)} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jeśli

(a) $|a| < |b| < 1$, **(b)** $|a| < 1 < |b|$, **(c)** $1 < |a| < |b|$.

9.1.B. Zadania trudne

9.1.B.10. Znaleźć wartość całki

$$\oint_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z\,dz, \qquad n \in \mathbb{N},$$

zakładając dodatnią orientację okręgu, po którym całkujemy.

9.1.B.11. Dana jest elipsa $E(k) = \{z : |z|+|z-i| = k\}$, gdzie $k \in (1, 1+\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$ jest ustalonym parametrem. Przyjmując, że $E(k)$ jest zorientowana dodatnio, wyznaczyć

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{E(k)} \frac{\sin \pi z}{z(1-z)^3}\,dz$$

w zależności od wyboru wartości parametru k.

9.1.B.12. Obliczyć całkę

$$I(r) = \oint\limits_{C(r)} \frac{z^2 + z^{-2}}{(\bar{z} - a)(b - \bar{z})}\, dz,$$

gdzie $0 < |a| < r < |b|$ oraz okrąg $C(r)$ jest dodatnio zorientowany.

9.1.B.13. Niech $r > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Stosując twierdzenie „o residuach", obliczyć całkę

$$I_r(a) = \oint\limits_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z - a|^2}, \qquad |a| \neq r.$$

9.1.B.14. Rozważmy rodzinę funkcji

$$g_\theta(z) = \frac{1}{1 + z\sin\theta}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

(a) Korzystając z twierdzenia „o residuach", wyznaczyć postać funkcji

$$f(z) = \int\limits_0^{2\pi} g_\theta(z)\, d\theta,$$

gdy $|z| < 1$.

(b) Różniczkując wyraz po wyrazie szereg

$$g_\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\theta) z^n, \qquad |z| < 1,$$

wyznaczyć współczynniki w szeregu Taylora

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\theta) z^n.$$

(c) Zweryfikować zgodność rozwinięć z części (a) i (b) zadania w przypadku $|z| < 1$.

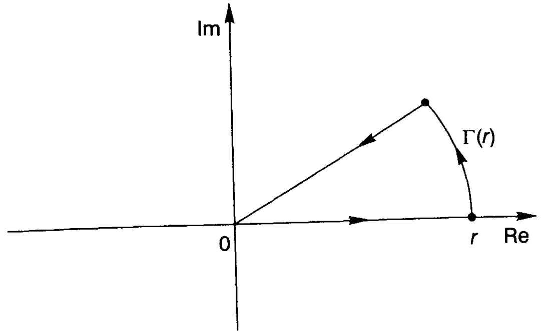
9.2. Zastosowania twierdzenia o residuach

9.2.A. Zadania łatwe

9.2.A.1. Dla dowolnie ustalonej liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ obliczyć całkę

$$I(n) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n}\, dx,$$

całkując funkcję $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ po dodatnio zorientowanym konturze $\Gamma(r)$ przedstawionym na rys. 14, czyli $\Gamma(r) = [0, r] \cup \left\{re^{it} : t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]\right\} \cup \left[re^{\frac{2\pi}{n}i}, 0\right]$.



Rys. 14

9.2.A.2. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)}\, dx.$$

9.2.A.3. Niech $a > 0$ będzie dowolnie ustalone i niech $f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$. Całkując f po odpowiednio dobranym konturze wykazać, że

$$I(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{e^a}.$$

9.2.A.4. Niech $a \in (1, +\infty)$ będzie dowolnie ustalone. Obliczyć całkę

$$I(a) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}.$$

9.2.B. Zadania trudne

9.2.B.5. Obliczyć całki:

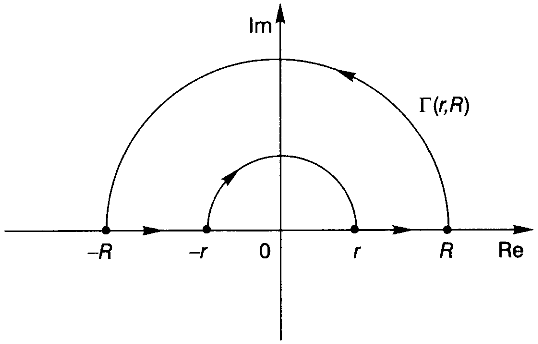
(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx,$

(b) $I(a) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$, gdzie $a \in (-1, 1)$ jest dowolnie ustalone.

9.2.B.6. Wyznaczyć wartość całki $I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$ w zależności od wyboru liczby rzeczywistej $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

9.2.B.7. Niech $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ oraz $\Gamma(r, R)$ będzie dodatnio zorientowanym konturem, jak na rys. 15. Rozważając całkę $\oint\limits_{\Gamma(r,R)} f(z)\,dz$, wyznaczyć

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$



Rys. 15

9.2.B.8. Obliczyć

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2},$$

gdzie $a \in (0, +\infty)$ jest dowolnie ustalone.