• Do domu pisemnie (z poprzedniej kartki):
– zad. 3
– zmodyfikować zad. 4, tak aby otrzymać ograniczenie na ilość zer funkcji w dysku o promieniu $r' < r$ (nie koniecznie $r' = \frac{1}{3}r$).

• Skończyć zad. 7 (Wskazówka: jeśli $\phi(w) = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$, to $\phi(\{|z| = r\}) = elipsa$. Ponadto skorzystać z zad. 6.)

Nowe zadania

•**1** Funkcja holomorficzna f przekształca dysk jednostkowy $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ w siebie, ponadto $f(0) = 0$. Wykazać, że $|f(z)| \leq |z|$ i $|f'(0)| \leq 1$. Pokazać, że jeśli w pewnym punkcie $z_0 \neq 0$ zachodzi równość $|f(z_0)| = |z_0|$, to $f(z)$ jest postaci ξz gdzie $|\xi| = 1$.

•**2** Niech $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ będzie funkcją holomorficzną, taką, że
– f jest bijekcją,
– 0 jest punktem stałym f.
Wykazać, że $f(z)$ jest postaci ξz gdzie $|\xi| = 1$.

•**3** Wykazać, że jeśli funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ma dwa punkty stałe, to $f(z) = z$.

•**4** Wykazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficzna, to mamy

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} .$$

Wsk. Rozpatrzeć złożenie $h \circ f \circ g$, gdzie $g(z) = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ i $h(z) = \frac{z-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}z}$.

•**5** Funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ spełania $f(0) = 0$ i $Re(f(z)) < 1$. Wykazać, że

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|} .$$

•**6** Niech $f : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że $|f'(i)| \leq \mathrm{Im}(f(z))$.
Wsk. Użyć homografii postaci $\frac{z-a}{z-\bar{a}}$.

•**7** Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $\frac{1}{z(z-1)^2}$ w pierścieniu $0 < |z| < 1$ i w pierścieniu $1 < |z|$.

•**8** Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w pierścieniu $1 < |z| < 2$ i w pierścieniu $2 < |z|$.

•**9** Jakiego typu osobliwość ma funkcja $\sin(\frac{1}{z})$ w $z = 0$.

•**10** Wykazać, że ∞ dla funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest biegunem rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem stopnia n.