Zadania

•1 Na podstawie tego co było powiedziane o całkach

$$\int_{\pm \mathrm{Im}(z)\geq 0,\,|z|=r} \frac{e^{\pm iz}}{z} dz$$

udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi\,.$$

•2 Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym zbiorem ograniczonym oraz niech $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągła, holomorficzną na U. Wykazać, że jeśli moduł f jest stały na ∂U, to albo f jest stała, albo f zeruje się w U.

•3 Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia n. Wykazać, że poziomica $|P(z)| = a$ nie może mieć więcej niż n składowych.

•4 Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną na otoczeniu dysku $\mathbb{D}$. Wykazać, że jeśli $f(\partial \mathbb{D}) \subset \mathbb{R}$, to f jest stała.

Wsk: Gdy $\mathrm{Im} f(w) \neq 0$ rozważyć funkcję $exp(-i\frac{f(z)}{\mathrm{Im}(f(w))})$.

•5 Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku domkniętego o środku w 0 i promieniu r. Niech $M = M_f(r) = sup_{|z|=r}\{|f(z)|\}$. Wykazać, że jeśli $f(0) \neq 0$, to liczba różnych pierwiastków funkcji f w kole $\{|z| \leq \frac{1}{3}r\}$ nie przekracza $\frac{ln(M/|f(0)|)}{ln(2)}$.

Wsk: Niech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pierwiastki f, $|z_i| \leq \frac{r}{3}$. Pokazać, że dla $g(z) = f(z)/\prod(z - z_i)$ mamy $|g(0)||z_1|\ldots|z_n| \leq \max_{|z|=r}|g(z)|(\frac{r}{3})^n$.

•6 Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku domkniętego o środku w 0 i promieniu R. Niech $r < R$. Wykazać, że

$$sup\{|f(z) - \frac{1}{z}| \;:\; r \leq |z| \leq R\,\} \geq \frac{1}{R}\,.$$

Wywnioskować, że $\frac{1}{z}$ w pierścieniu $r \leq |z| \leq R$ nie jest granicą jednostajną ciągu wielomianów.

•7 Wykazać, że jeśli wielomian $P(z)$ stopnia n spełnia oszacowanie $|P(z)| \leq M$ na kole jednostkowym, to poza kołem jednostkowym spełnia $|P(z)| \leq M|z|^n$.

•8 Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia n. Zakładamy, że mamy oszacowanie $|P(z)| \leq M$ na kole $|z| \leq 1$. Udowodnić, że $|P(z)| \leq M(a+b)^n$ wewnątrz elipsy o ogniskach $-1, 1$ i półosiach a i b.

Wsk. Rozważyć przekształcenie $z = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$.
Uwaga. Osie elips o ogniskach w $-1, 1$ są postaci $\frac{1}{2}(r \pm r^{-1})$, $r \in \mathbb{R}$.