Zadania

• **Z** = zrobione
• **D** = do domu

•1 Z Pokazać, że dla $|z| < \frac{1}{2}$ zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |Log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z| \, .$$

Wskazówka: $Log(1+z) = \int_{[0,z]} \frac{1}{1+w} dw$.

•2 D Dana funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Dla wekrora $v \in \mathbb{R}^2$ symbol $D_v(f)$ oznaczamy pochodną kierunkową funkcji f w kierunku v. Dla wektora $v \in \mathbb{C}^2$ definiujemy

$$D_v(f) = D_{Re(v)}(f) + iD_{Im(v)}(f) \, .$$

Znaleźć wektory $v, w \in \mathbb{C}^2$ takie, że

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = D_v(f) dz + D_w(f) d\overline{z} \, ,$$

gdzie $dz = dx + i\,dy$, $d\overline{z} = dx - i\,dy$.

Pokazać, że warunek $D_w(f) = 0$ jest równoważny równaniom Cauchy'ego–Riemanna. Ponadto pokazać, że jeśli f jest holomorficzna, to $D_v(f) = f'$, gdzie f' jest pochodną zespoloną.

Stosuje się następujące oznaczenia: $D_v = \frac{\partial}{\partial z}$ *oraz* $D_w = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

•3 D Niech f będzie funkcą holomorficzną, a γ dowolną pętlą w dziedzinie f. Wykazać, że

$$Re\left(\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz \right) = 0 \, .$$

•4 Z Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną dla $z \leq R$. Wykazać, że

$$\int_{|z| \leq R} f(z) dx\, dy = \pi R^2 f(0) \, .$$

•5 Z Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną dla $z \leq R$. Przez ξ_n oznaczamy pierwiastek pierwotny stopnia n z jedynki. Pokazać, że $f(0)$ jest granicą średnich arytmetycznych swoich wartości w wierzchołkach n-kąta, tzn.

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(R\,\xi_n^k)}{n} \, .$$

•6 D Rozwinąć funkcję $\frac{1}{1+z^2}$ w szereg Taylora wokól punktu 1 i znaleźć promień zbieżności

•7 D Wyznaczyć pierwsze sześć wyrazów rozwinięcia Taylora w zerze funkcji $\frac{1}{\cos}(z)$ oraz $\sqrt{\cos(z)}$.

•8 Z Wykazać, że jeśli f jest holomorficzna to ciąg $\left(\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$ jest ograniczony.

•**9 D** Funkcja holomorficzna f jest określona w otoczeniu zera. Wykazać, że jeśli f przyjmuje wartości rzeczywiste we wszystkich punktach postaci $\frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to rozwiniecie $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste.

•**10 Z** Niech $f : \mathbb{C} - A \to \mathbb{C}$, będzie funkcją holomorficzną, przy czym zakładamy, że zbiór A jest dyskretny i minimalny. Wykazać że promień zbieżności szeregu Taylora w zerze jest równy $\min\{|a| : a \in A\}$.

•**11 D** Dana funkcja holomorficzna f na otoczeniu koła $\overline{\mathbb{D}}$. Rozwinięcie f jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zakładamy, że $|f(z)| \leq 1$ na $\mathbb{D}$. Wykazać, że dla $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \frac{|z|^k}{1-|z|} \text{ dla } z \in \mathbb{D}$$

Wsk. Skorzystać z nierówności Cauchy'ego $|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}$, gdzie $M_r(f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

•**12 Z** Dana funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pokazać, że jeśli dla pewnych $M, R > 0$,

$$|f(z)| \leq M|z^n|$$

dla $|z| > R$, to f jest wielomianem stopnia n.

•**13 D** Niech $f(z)$ będzie wielomiandem stopnia n. Pokazać, że dla $0 < r < s$ mamy

$$\frac{M_f(r)}{r^n} \geq \frac{M_f(s)}{s^n},$$

a równość zachodzi tylko gdy $f(z) = az^n$ dla $a \neq 0$.