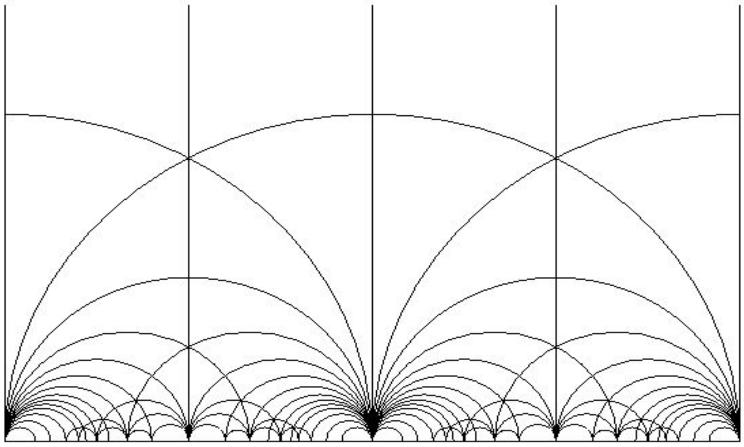
Zadania o homografiach



1. Niech
$$F = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |re\, z| \leq \frac{1}{2},\, |z| \geq 1,\, Im(z) > 0\}\,.$$
Wykazać, że
$$\mathbb{H}_+ = \bigcup_{A \in SL_2(\mathbb{Z})} h_A(F)\,,$$
gdzie h_A jest homografią otrzymaną z macierzy A.

2. Pokazać, że homografia $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przeprowadza $\mathbb{H}_+$ na dysk jednostkowy $\mathbb{D}$. Opisać obrazy prostych $re\, z = const$, $Im\, z = const$ oraz okręgów $|z| = const$.

3. Pokazać, że homografia $h(z) = -\frac{z+1}{z-1}$ przekształca $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$ na $\{z \in \mathbb{C} \ : \ im\, z > 0,\ re\, z > 0\}$ i opisać obrazy prostych przechodzących przez zero i okręgów o środku w zerze.

4. Niech $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$. Definiujemy dwustosunek czwórki punktów jako
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}\,.$$
Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek.

5. Niech S_1 i S_2 będą okręgami lub prostymi w $\overline{\mathbb{C}}$, a I_1 i I_2 odpowiednimi inwersjami względem okręgów (lub symetriami gdy S_i jest prostą). Dana jest homografia H przeprowadzająca S_1 na S_2. Wykazać, że
$$H \circ I_1 = I_2 \circ H\,.$$