5.2.3. Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

(i) $\dfrac{\pi}{\sin \pi z} = \dfrac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2}$, $z \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$,

(ii) $\dfrac{\pi}{\cos \pi z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$, $z \neq \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \ldots$,

(iii) $\pi \operatorname{tg} \pi z = 2z\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - z^2\right]^{-1}$, $z \neq \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \ldots$

5.2.4. Wykazać, że dla $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\beta}{\alpha} \neq \mp 1, \mp 2, \ldots$ mamy

$$\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi\beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{1}{n\alpha + (\alpha-\beta)}\right).$$

Wykazać również, że

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 8} + \ldots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.2.5. Znaleźć rozwinięcia funkcji hiperbolicznych analogicznie do rozwinięć z zadania 5.2.3.

5.2.6. Znaleźć rozwinięcie funkcji $(\sin z \sinh z)^{-1}$ na ułamki proste.

5.2.7. Wykazać, że

$$(\cosh z - \cos z)^{-1} = \frac{1}{z^2} + \pi z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \pi n}\left(\frac{1}{4}z^4 + n^4\pi^4\right)^{-1}$$

dla $z \neq n\pi(\mp 1 \mp \mathrm{i})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

5.2.8. Wykazać, że jeżeli λ_n są różnymi od zera dodatnimi pierwiastkami równania $\operatorname{tg} z = z$ (por. zadanie 3.9.16), to

$$\frac{z\sin z}{\sin z - z\cos z} = \frac{3}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}.$$

5.2.9. Rozważając całkę

$$\int_{\partial Q_n} \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z)\cos^2\zeta},$$

gdzie ∂Q_n jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $n\pi(\mp 1 \mp \mathrm{i})$, wykazać, że

$$\frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left[z - \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-2}.$$

5.2.10. Wykazać, że dla $0 < a < 1$

$$\frac{\mathrm{e}^{az}}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} + \sum^{\infty} \frac{2z\cos 2\pi n a - 4\pi n \sin 2\pi n a}{\ldots}.$$

5.3. Wzór Jensena. Charakterystyka Nevanlinny

5.3.1. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją meromorficzną w kole $K(R)$ i jeżeli w kole $\overline{K}(r)$ $(0 < r < R)$ funkcja f ma m zer: $a_1, a_2, \ldots, a_m$, gdzie $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_m| < r$, oraz n biegunów: $b_1, b_2, \ldots, b_n$, gdzie $0 < |b_1| \leq |b_2| \leq \ldots \leq |b_n| < r$, to zachodzi *wzór Jensena*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \log\frac{r^m}{|a_1 a_2 \ldots a_m|} - \log\frac{r^n}{|b_1 b_2 \ldots b_n|}.$$

Wskazówka. Czynnik $\dfrac{r^2 - \bar{a}z}{r(z-a)}$ usuwa zero $z = a$ funkcji f i nie zmienia $|f(re^{i\theta})|$.

5.3.2. Wykazać, że wzór Jensena jest prawdziwy również i wtedy, gdy na okręgu $C(r)$ leżą zera lub bieguny funkcji $f(z)$.

5.3.3. Jaką postać przybierze wzór Jensena, jeżeli $f(z)$ ma dla $z = 0$ zero lub biegun rzędu λ?

5.3.4. Wyznaczyć całkę

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

w zależności od r dla funkcji:
(i) $f(z) = z^3 + 2z + 3$, (ii) $f(z) = \sin z$, (iii) $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

5.3.5. Wykazać, że gdy wprowadzimy następujące oznaczenia:

1° $\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{dla } x \geq 1, \\ 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$

2° $n(r, f)$ — liczba biegunów funkcji meromorficznej $f(z)$ w kole $K(r)$, z uwzględnieniem ich krotności,

3° $m(r, f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$,

4° $T(r, f) = m(r, f) + \int_0^r \dfrac{n(t, f)}{t}dt$,

wówczas wzór Jensena można zapisać w postaci

$$T(r, f) - T\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log|f(0)|,$$

przy założeniu, że $f(z)$ jest analityczna i różna od zera dla $z = 0$.

$T(r, f)$ nazywamy *charakterystyką Nevanlinny* funkcji meromorficznej $f(z)$. Odgrywa ona podstawową rolę w teorii funkcji meromorficznych.

5.3.6. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by dla funkcji meromorficznej $f(z)$ całka $\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$ miała wartość stałą.

5.3.7. Wyznaczyć $n(r, f)$, $n(r, 1/f)$ dla $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{\ldots}$.

5.3.8. Wyznaczyć $T(r, f)$ dla $f(z) = e^z$.

5.3.9. Wykazać, że jeśli $P(z) = az^n + \ldots + a_0$ jest wielomianem stopnia n, $f(z) = \exp P(z)$, to

$$T(r, f) \sim \frac{|a|}{\pi} r^n \quad \text{przy} \quad r \to +\infty.$$

5.3.10. Wykazać, że dla $f(z) = \exp\left(\frac{\pi i}{1-z}\right)$, $z \in K(1)$, jest

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

5.3.11. Wykazać, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną w kole $K(R)$, to

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

jest funkcją rosnącą i wypukłą zmiennej $\log r$.

5.3.12. Wykazać, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną i ograniczoną w kole $K(1)$, $f(0) \neq 0$ i jeśli $\mu(r) = n(r, 1/f)$ oznacza liczbę zer funkcji $f(z)$ w kole $K(r)$, to $\lim_{r \to 1-} \mu(r) \log r = 0$.

5.3.13. Wykazać, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną nie znikającą identycznie i ograniczoną w kole $K(1)$, której zerami są $a_1, a_2, a_3, \ldots$, przy czym $0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \ldots$, a ponadto każde z zer a_n wypisane jest z odpowiednią krotnością, to
(i) istnieje granica $\lim |a_1 a_2 \ldots a_n| \neq 0$, przy czym
(ii) szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|)$ jest zbieżny.

5.3.14. Załóżmy, że funkcje $\varphi(z)$, $\psi(z)$ są analityczne i ograniczone w kole $K(1)$ oraz że dla każdego naturalnego n mamy $\varphi(a_n) = \psi(a_n)$, przy czym $|a_n| < 1$, $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) = +\infty$. Wykazać, że $\varphi = \psi$.

5.4. Iloczyny nieskończone

Iloczyn nieskończony $p_1 p_2 \ldots p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ nazywamy *zbieżnym*, jeśli co najwyżej skończona liczba czynników p_k jest równa zeru i jeżeli ciąg iloczynów czynników nie znikających dąży do granicy różnej od zera.

Dla iloczynu nieskończonego zbieżnego mamy $\lim p_n = 1$ i z tego powodu iloczyn nieskończony zapisujemy w postaci $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$. Iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$, $1 + a_n \neq 0$, jest zbieżny i rozbieżny wraz z szeregiem $\sum \mathrm{Log}(1 + a_n)$. Warunkiem dostatecznym zbieżności iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jeżeli $\{u_n(z)\}$ jest ciągiem funkcji analitycznych w obszarze G oraz $|u_n(z)| \le A_n$ dla każdego $z \in G$, przy czym $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}[1 + u_n(z)]$ jest zbieżny w obszarze G i przedstawia funkcję analityczną w tym obszarze.

5.4.1. Wykazać, że jeśli $\sum |u_n|^2 < +\infty$, to warunkiem koniecznym i dostateczny zbieżności iloczynu $\prod(1 + u_n)$ jest zbieżność szeregu $\sum u_n$.

5.4.2. Wykazać, że jeśli $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny, podczas g iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ jest rozbieżny.

5.4.3. Wykazać, że

(i) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$, (ii) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$, (iii) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1$

5.4.4. Wykazać, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n})$ jest zbieżny do $(1 - z)^{-1}$ przy $|z| < 1$.

5.4.5. Wyznaczyć obszary zbieżności iloczynów nieskończonych:

(i) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]$, (ii) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\right]$,

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$, (iv) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) e^{-1/n}$.

5.4.6. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb zespolonych, takim że: $|a_n| < 1$, $a_n \neq$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_m \neq a_n$ przy $m \neq n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|^2) < +\infty$.

Wykazać, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - a_n}{z - (\bar{a}_n)^{-1}}$ jest zbieżny w kole $K(1)$ i przedstawia w ty kole funkcję $\varphi(z)$ analityczną, równą zeru tylko dla $z = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i spełniają nierówność $|\varphi(z)| < 1$ dla $z \in K(1)$.

5.4.7. Wykazać, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$ jest zbieżny w całej płaszczyźnie i jego granica jest funkcją całkowitą.
Wskazówka. Wykazać, że $|(1 - z)e^z - 1| \le |z|^2$ dla $|z| \le 1$.

5.4.8. Wykazać, że ciąg funkcyjny

$$\frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\exp(z \log n)} = h_n(z)$$

jest zbieżny w całej płaszczyźnie i że jego granica $h(z)$ jest funkcją całkowitą rów zeru jedynie dla $z = 0, -1, -2, \ldots$

5.4.9 (cd.). Dowieść, że gdy $\Gamma(z) = [h(z)]^{-1}$, wtedy
(i) $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$, (ii) dla n naturalnych $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

5.5. Rozkład funkcji całkowitej na czynniki pierwsze

Każdy wielomian o zerach $0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_k \neq 0$ dla $k = 1, \ldots, n$) może być przedstawiony w pos iloczynu

$$Az^k\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Weierstrass dowiódł istnienia analogicznego rozkładu dla dowolnej funkcji całkowitej oraz moż ści skonstruowania funkcji całkowitej o z góry zadanych zerach, jeżeli tylko nie mają one w skończon punktu skupienia.