4.5.8. Znaleźć rozwinięcie funkcji $\exp(z + z^{-1})$ w szereg Laurenta dla $|z| > 0$. Wyrazić współczynniki Laurenta za pomocą
(i) całek zawierających funkcje trygonometryczne,
(ii) sum pewnych szeregów liczbowych, opierając się na identyczności $\exp(z + z^{-1}) = e^z e^{1/z}$.

4.5.9. *Funkcja Bessela* $J_n(z)$ jest zdefiniowana przy całkowitym n jako n-ty współczynnik ($n \geq 0$) rozwinięcia Laurenta

$$\exp\left(\frac{1}{2}z(\zeta - \zeta^{-1})\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\zeta^n \quad (0 < |\zeta| < +\infty).$$

Wykazać, że

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}.$$

4.5.10. Jedynymi osobliwościami funkcji $f(z)$ w płaszczyźnie domkniętej są: biegun pierwszego rzędu $z = -1$ z residuum 1, biegun drugiego rzędu $z = 2$ z residuum 2. Ponadto $f(0) = \frac{7}{4}$, $f(1) = \frac{5}{2}$. Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

4.5.11. Znaleźć rozwinięcie Laurenta funkcji $z^{-1}(1 - z)^{-1}$ w pierścieniowych otoczeniach punktów:
(i) $z = 0$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = \infty$.

4.5.12. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)^{1/2}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$, przyjmując, że $\operatorname{im} f(3/2) > 0$.

4.5.13. Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta obu gałęzi funkcji $\big((z-a)(z-b)\big)^{1/2}$ w otoczeniu punktu $z = \infty$.

4.5.14. Wykazać, że funkcje

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-n)^{-2} = \varphi(z)$$

są analityczne przy $z \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ i mają te same części główne w otoczeniu każdego punktu osobliwego $0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

4.5.15. Dowieść, że funkcja całkowita

$$g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-n)^{-2}$$

redukuje się do zera.
Wskazówka. Wykazać, że $g(z) \to 0$

4.5.16. Wykazać, że

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

dla $z \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ (kreska przy symbolu sumy oznacza, że w sumowaniu należy opuścić wyraz ze wskaźnikiem $n = 0$).

4.5.17. Rozwinąć funkcję $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ w szereg Laurenta w pierścieniu
(i) $0 < |z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$.
Wyrazić współczynniki Laurenta za pomocą liczb

$$s_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Opierając się na zadaniu 4.3.9(ii), znaleźć związek pomiędzy liczbami s_k i liczbami Bernoulliego B_k.

4.6. Wyznaczanie sum pewnych szeregów liczbowych i funkcyjnych za pomocą residuów

4.6.1. Wykazać, że jeżeli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną w płaszczyźnie otwartej, mającą skończoną liczbę biegunów $a_1, a_2, \ldots, a_m$, z których żaden nie jest liczbą całkowitą, i jeżeli $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, to istnieje granica

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) \text{ i jest ona równa } -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(a_k; \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z).$$

Wskazówka. Całkować funkcję $\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ po brzegu kwadratu Q_N o wierzchołkach $\left(N + \frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp i)$.

4.6.2. Wykazać, że

$$s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 + n + 1)^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{tgh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

4.6.3. Wykazać, że z pominięciem pewnych wyjątkowych (jakich?) wartości a zachodzą równości:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + a^2)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a} \operatorname{ctgh} \pi a - \frac{1}{a^2}\right)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 + a^4)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a^3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \pi a\sqrt{2} + \sinh \pi a\sqrt{2}}{\cosh \pi a\sqrt{2} - \cos \pi a\sqrt{2}} - \frac{1}{a^4}\right)$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + a^4} = \frac{\pi}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{\sinh \pi a\sqrt{2} - \sin \pi a\sqrt{2}}{\cosh \pi a\sqrt{2} - \cos \pi a\sqrt{2}}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - a^4)^{-1} = \frac{1}{\cdots} - \frac{\pi}{\cdots}(\operatorname{ctg} \pi a + \operatorname{ctgh} \pi a)$.

4.6.4. Wykazać, że dla $a \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

4.6.5. Uzasadnić wzór

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-a)^{-1}(n-b)^{-1} = -\pi^2 \frac{\operatorname{ctg} \pi a - \operatorname{ctg} \pi b}{\pi a - \pi b}$$

dla zespolonych a, b nie będących liczbami całkowitymi.

4.6.6. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^{-1}$.

4.6.7. Wykazać, że jeżeli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną w płaszczyźnie otwartej, mającą skończoną liczbę biegunów $a_1, a_2, \ldots, a_m$, z których żaden nie jest liczbą całkowitą, i jeżeli $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, to istnieje granica

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n)$$

i jest ona równa

$$-\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\left(a_k; \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}\right).$$

Wskazówka. Całkować funkcję $f(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}$ po brzegu kwadratu Q_N o wierzchołkach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp \mathrm{i})$.

4.6.8. Wykazać, że:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \sinh \pi a}$ dla $a \neq 0, \mp\mathrm{i}, \mp 2\mathrm{i}, \ldots,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{1}{\sin \pi a} + \frac{1}{\sinh \pi a}\right)$ dla $a \neq \mp n, \mp n\mathrm{i}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots),$

(iii) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+a^4} = \frac{\pi}{a^3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi a}{\sqrt{2}} \cosh\frac{\pi a}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\pi a}{\sqrt{2}} \sinh\frac{\pi a}{\sqrt{2}}}{\sin^2\frac{\pi a}{\sqrt{2}} + \sinh^2\frac{\pi a}{\sqrt{2}}}$ dla $a \neq \frac{\mp 1 \mp \mathrm{i}}{\sqrt{2}} n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots),$

(iv) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4+a^4} = \frac{\pi}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\pi a}{\sqrt{2}} \sinh\frac{\pi a}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\pi a}{\sqrt{2}} \cosh\frac{\pi a}{\sqrt{2}}}{\sin^2\frac{\pi a}{\sqrt{2}} + \sinh^2\frac{\pi a}{\sqrt{2}}}$ dla $a \neq \frac{\mp 1 \mp \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots).$

4.6.9. Całkując funkcję $\frac{\pi \sin az}{z^3 \sin \pi z}$, gdzie $-\pi < a < \pi$, po brzegu ∂Q_N kwadratu o wierzchołkach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp \mathrm{i})$, wyprowadzić wzory

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin an}{n^3} = \frac{a}{12}(\pi^2 - a^2),$ (ii) $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$

4.6.10. Wykazać, że przy dowolnym zespolonym $x \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ oraz $-\pi < a <$ całka

$$I_N = \int_{\partial Q_N} \frac{\cos az \, dz}{(x^2 - z^2) \sin \pi z},$$

gdzie ∂Q_N jest brzegiem kwadratu Q_N o wierzchołkach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp \mathrm{i})$, dąży d zera przy $N \to +\infty$. Wyprowadzić stąd wzór

$$\frac{\cos ax}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos na}{x^2 - n^2}.$$

4.6.11. Wykazać, że jeśli $a \neq 0$ jest liczbą rzeczywistą, a $\{R_N\}$ jest ciągiem prostokątó o wierzchołkach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp \mathrm{i}a^{-1})$, to całki

$$I_N = \int_{\partial R_N} \frac{z \, dz}{\sin \pi z \sinh \pi a z}$$

dążą do zera, gdy $N \to \infty$.

(i) Wyprowadzić stąd równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \pi a n} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \frac{\pi n}{a}}$$

dla $a \neq 0$, rzeczywistych.

(ii) Wykazać, że

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}} - \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} + \frac{3}{\mathrm{e}^{3\pi} - \mathrm{e}^{-3\pi}} - \ldots = \frac{1}{8\pi}.$$

4.6.12. Wykazać, że równość 4.6.11(i) zachodzi również dla zespolonych a nie leżącyc na osi urojonej.

4.6.13. Wykazać, że przy zespolonych $x \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ oraz $-\pi < a < \pi$ całka

$$\int_{\partial Q_N} \frac{\pi z \sin az \, dz}{(x^2 - z^2) \sin \pi z},$$

gdzie Q_N jest kwadratem o wierzchołkach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\mp 1 \mp \mathrm{i})$, dąży do zera prz $N \to +\infty$. Wyprowadzić stąd wzór

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin ax}{\sin \pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin an}{x^2 - n^2}.$$

4.6.14. Wykazać, że

(i) $\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$ dla $z \neq \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \ldots,$

(ii) $\frac{\pi}{\cosh \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{z^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$ dla $z \neq \mp\frac{1}{2}\mathrm{i}, \mp\frac{3}{2}\mathrm{i}, \mp\frac{5}{2}\mathrm{i}, \ldots$