Funkcje analityczne LISTA 1 **20.02.2006**

1. Kiedy przekształcenie $\mathbb{R}$ - liniowe na $\mathbb{R}^2$ jest $\mathbb{C}$ - liniowe ?

2. Dla $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pokazać, że warunkiem koniecznym $\mathbb{C}$ - różniczkowalności (czyli holomorficzności) jest $\mathbb{R}$ - różniczkowalność. Znaleźć warunek wystarczający używając macierzy różniczki. Czym jest różniczka w punkcie z_0 jako przekształcenie $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$?

Uwaga: Jeśli f jest funkcją, to f_t oraz $\partial_t f$ będzie oznaczać $\frac{\partial f}{\partial t}$.

3. Policzyć z definicji pochodne funkcji z^4 oraz $\frac{1}{z}$. Czy wzory dotyczące pochodnej sumy, iloczynu, ilorazu pokrywają się ze wzorami dla funkcji rzeczywistych ?

4. Zbadać $\mathbb{C}$ - różniczkowalność następujących funkcji $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tam, gdzie są określone: (a) $zRe(z)$ (b) z^n (c) $e^x \cos y + ie^x \sin y$ (d) $e^x \cos y + ie^y \sin x$ (e) $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ (f) $\overline{z}$ (g) $7x + 2y + 3iy$ (h) $|z|^2$.

5. Niech $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Pokazać, że równania na u i v otrzymane w zadaniu 2 są równoważne równaniu $\partial_{\overline{z}} f = 0$. Zauważyć, że w takim razie pytanie o holomorficzność funkcji z 4 a,b,f,h jest trywialne.

6. Pokazać, że jeśli $f = u + iv$ jest różniczkowalna, to u i v są harmoniczne (funkcje harmoniczne sprzężone).

7. Mając daną funkcję $u(x,y)$ znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne do niej sprzężone oraz odpowiednie funkcje analityczne. (a) xy (b) $x^2 - y^2 + xy$ (c) $\frac{y}{x^2+y^2}$ (d) $log|z|$ (e) $e^x(x \cos y - y \sin x)$.

8. Używając zadania 2 pokazać, że jeśli pochodna (zespolona) f w z_0 jest niezerowa, to f zachowuje kąty w z_0. Dokładniej: Dwie krzywe przecinają się w z_0 pod tym samym kątem, co ich obrazy w $f(z_0)$.

9. Pokazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby funkcja $u(x,y)$ harmoniczna w obszarze D miała harmoniczną sprzężoną, jest istnienie w obszarze D funkcji pierwotnej do funkcji $f(z) = u_x - iu_y$.

10. Zbadać, gdzie funkcja $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ jest holomorficzna (tzn. $\mathbb{C}$ - różniczkowalna). Jaki jest obraz koła K(0,1) oraz kostki $[0,1] \times [0,1]$ (napisać równania brzegów obrazu)?

11. Zrobić poprzednie zadanie dla funkcji z^2 i $\frac{1}{z}$.

12. Sprawdzić, że $\varphi(\infty) = (0,0,1)$ i $\varphi(re^{i\theta}) = (\frac{2r\cos\theta}{r^2+1}, \frac{2r\sin\theta}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1})$ zadaje homeomorfizm jednopunktowego uzwarcenia $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ze sferą S^2 (tzw. sfera Riemanna). Zbadać obrazy okręgów $C(0,r)$ i prostych $y = ax$.

13. Zbadać, czy następujące funkcje : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ przedłużają się do odwzorowań ciągłych sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ w siebie. Jeśli tak, opisać ich działanie: (a) z^n (b) $\frac{1}{z}$ (c) e^z (zdefiniowane przez szereg) (d) $\frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Karol Palka

Funkcje analityczne LISTA 2 **27.02.2006**

1. Używając wzoru na promień zbieżności szeregu potęgowego pokazać, że jeśli $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ jest analityczna w kole K(0,r), to jest w nim holomorficzna, a pochodna jest funkcją analityczną. Znaleźć i uzasadnić wzór na funkcję pochodną. Zauważyć, że zbiór funkcji holomorficznych na zbiorze otwartym U tworzy pierścień.

2. Wyliczyć Re oraz Im dla poniższych funkcji i policzyć ich pochodne: (a) $\exp z$ (b) $\sin z$ (c) $\cos z$ (d) $\operatorname{tg} z$ (e)$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $det(A) \neq 0$.

Uwaga: Funkcje takie jak w 2(e) nazywamy homografiami i traktujemy najczęściej jako przekształcenia sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$.

3. Udowodnić, że homografie tworzą grupę z działaniem składania, że zachowują kąty zorientowane oraz że grupa ta jest generowana przez przekształcenia liniowe i inwolucję $(\frac{1}{z})$.

Uwaga: Okręgiem uogólnionym nazywamy okrąg na sferze Riemanna, czyli okrąg lub prostą na płaszczyźnie.

4. Pokazać, że homografie przekształcają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

5. Pokazać, że każdy okrąg uogólniony można przeprowadzić homografią na oś OX.

6. Co można powiedzieć o macierzach A i B, jeśli w trzech różnych punktach z_i $(i = 1, 2, 3)$ zachodzi $h_A(z_i) = h_B(z_i)$? (Wsk. Wystarczy pokazać, że rozwiązanie odpowiedniego układu równań istnieje.)

7. Pokazać, że trzy różne punkty na $\widetilde{\mathbb{C}}$ można przeprowadzić homografią na $0, 1, \infty$ oraz że istnieje dokładnie jedna homografia przekształcająca dowolnie zadane trzy różne punkty na dowolnie zadane trzy różne punkty.

8. Znaleźć ogólną postać homografii zachowujących okrąg C(0,1). Które z nich zachowują koło K(0,1) ?

9. Opisać działanie poniższych funkcji jako przekształceń płaszczyzny. Na co przechodzą $K(0, 1)$, $K(1, 1)$, $[0, 1] \times [0, 1]$? (a) $\exp z$ (b) $\frac{1}{z^2+1}$.

10. Pokazać, że każdy wielomian rzeczywisty rozkłada się na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Uwaga: Punkty z i w są symetryczne względem $C(a, r)$, gdy $(z - a)\overline{(w - a)} = r^2$. Łatwo zobaczyć, co to oznacza geometrycznie.

11. Pokazać, że homografie przekształcają punkty symetryczne względem okręgu uogólnionego C na punkty symetryczne względem obrazu tego okręgu. (Wsk.: Wykazać, że okrąg uogólniony O przechodzi przez punkty symetryczne względem C wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadły do C.)

12. Przekształcić konforemnie dopełnienie sumy kół o środkach w punktach 5 i -5 i promieniach 4 na pierścień, którego jednym brzegiem jest C(0,1), a drugim brzegiem jest C(0,r). Podać możliwe wartości r.

Uwaga: Przekształcenie holomorficzne jest biholomorfizmem, jeśli odwrotne też jest holomorficzne.

13. Obszar P jest częścią wspólną dwóch kół: $K(-2.5+i,3)$ oraz $K(1+5i,4)$. Opisać dokładnie jakich funkcji trzeba użyć, żeby przekształcić go biholomorficznie na K(0,1) (nie trzeba podawać wzorów tylko sposób). Z czego wynika konforemność użytego przekształcenia ?

14. Niech U będzie zbiorem spójnym i otwartym. Dowieść, że każde dwa punkty można połączyć łamaną w U.

15. Podać ogólną postać homografii zachowujących pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych.

16. Obszar X powstaje z górnej półpłaszczyzny poprzez wycięcie koła K(0,1) oraz półprostej pionowej $[2i, i\infty)$. Przekształcić biholomorficznie X na koło jednostkowe.

Karol Palka

Funkcje analityczne LISTA 3 **12.03.2006**

Definicje i oznaczenia: $K_x := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = x\}$, $L_y := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = y\}$, $P_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : Arg(z) = \alpha\}$, $H(U)$ oznacza pierścień funkcji holomorficznych na U.

1. Pokazać, że homografie zachowują dwustosunek: $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$.

2. Znaleźć homografie h spełniające:
   (a) $h[C(0,2)] = C(0,2)$, $h(4) = 0$, $h[C(0,1)] \parallel i\mathbb{R}$,
   (b) $h[C(0,1)] = C(0,2)$, $h(0) = \frac{1}{2}$, $h(3i) \in \mathbb{R}$,
   (c) obrazem obszaru między $C(0,2)$ i $C(1,1)$ jest pas równoległy do $i\mathbb{R}$,
   (d) $h(\infty) = \infty$.

3. Opisać, na co przechodzą podane zbiory przy podanych przekształceniach g :
   (a) okręgi $C(0,r), r \geqslant 1$ i półproste P_α; $g(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ (Wsk. $z = re^{i\alpha}$),
   (b) proste $K_x, |x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ i odcinki $[-\frac{\pi}{2} + iy_0, \frac{\pi}{2} + iy_0]$; $g(z) = \sin z$,
   (c) $K(0,1)$; $g(z) = \operatorname{arc\,tg} z$.
   (d) półproste $P_\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$; $g(z) = Log(z)$.

4. Znaleźć przybliżone rozwiązanie lub policzyć:
   (a) $\sin z = 5$, (b) $Log(z) = i\pi + 2$, (c) $(2-3i)^{2-3i}$, (d) $\operatorname{arc\,tg} \frac{i}{2}$

5. Odwzorować bijektywnie i konforemnie obszar A na obszar B:
   (a) $A = \{z : Im(z) > 0\}\backslash\overline{K(0,1)}$, $B = \{z : Im(z) > 0\}$,
   (b) $A = \{z : \alpha < Arg(z) < \alpha + \beta\}, \beta \in (0, 2\pi)$, $B = \{z : |z| < 1 \text{ i } Im(z) > 0\}$,
   (c) $A = K(0,1)\backslash[-1,t], -1 < t < 0$, $B = \{z : 0 < Re(z) < 2\}$,
   (d) $A = \mathbb{C}\backslash[2+i, 3-i]$, $B = K(-1,\sqrt{2}) \cap K(1,\sqrt{2})$,

6. Pokazać, że na obszarze wypukłym, który nie zawiera zera, można zdefiniować gałąź logarytmu.

7. Obszar U powstaje z koła $K(0,9)$ poprzez wycięcie sześciokąta foremnego o średnicy 3 i środku w 1. Znaleźć na U funkcje pierwotne do podanych lub wykazać, że nie istnieją: (a) $\frac{1}{z-1-i}$, (b) $\frac{1}{(z-1-i)^3}$.

8. Używając definicji całki zespolonej scałkować funkcję $\frac{1}{z^2+12}$ po krzywych T_1 i T_2, gdzie T_1 to górny łuk okręgu C(0,2), a T_2 to odcinek $[-2,2]$.

9. Scałkować z definicji $\frac{1}{z-z_0}$ po brzegu kwadratu o wierzchołkach $z_0 \pm a \pm ia$, $a \in \mathbb{R}_+$.

10. Policzyć całkę z funkcji $\frac{1}{z^2-1}$ po okręgu $C(1,1)$. Udowodnić, że całka po okręgu $C(0,2)$ daje zero. Nie licząc podać ile będzie wynosić całka po $C(-1,1)$ i dokładnie to uzasadnić.

11. Pokazać, że jeśli $f \in H(K(0,R)\backslash 0)$, to $\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$ dla $0 < r < R$ nie zależy od r. Ile wynosi ta całka, jeśli f jest dodatkowo holomorficzna w 0 ?

12.* Dla $f \in C^\infty(\Gamma)$ policzyć $\int_{\partial\Gamma} f dz$. Wywnioskować twierdzenie Cauchy'ego.

Karol Palka

Funkcje analityczne LISTA 4 **10.04.2006**

Poniżej przyjmujemy, że funkcje są holomorficzne, krzywe różniczkowalne i nie przechodzą przez punkty osobliwe funkcji. $P(a,r,R) := int(K(a,R)\backslash K(a,r))$, a $Aut(U)$ to holomorficzne automorfizmy U.

1. Pokazać, że jeśli $f^{(n)}(z_0) = 0$ dla $n = k, k+1, ...$, to f jest wielomianem.
2. Dla krzywej $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}\backslash\{a\}$ zdefiniujmy $h(t) = \int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds$. Badając funkcję $e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$ wykazać, że $Ind_\gamma(a)$ jest całkowity.
3. Policzyć $\int_E \frac{1}{z^3+1}dz$, gdzie E ma równanie $2x^2+4y^2=3$.
4. Policzyć $\int_{C(0,r)} \frac{z^7-5z^5+\sqrt{2}}{2z^9-z+1}dz$ dla dużych r.
5. Niech $f(z) = \sum_{i=-15}^{\infty} p_i(z-a)^i$. Ile wynosi $\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^k}dz$ dla $k=1$ i $k=3$?
6. Ile maksymalnie wartości może przyjmować całka $\int_C \frac{dz}{P_n(z)}$ gdzie P_n jest wielomianem o n różnych pierwiastkach, a C jest homeomorficzne z okręgiem ?
7. Policzyć $\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$. Pokazać, że obliczenie to implikuje twierdzenie Liouville'a.
8. Ile wynosi $f(0)$ i $f'(0)$, jeśli dla $n \in \mathbb{N}_+$:

   (a) $f(\frac{1}{n}) = n^3(sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$? (b) $f(\frac{n+2}{3n^2}) = \frac{2+n+3n^2}{4+2n+9n^2}$?
9. (a) Wykazać, że na obszarze U istnieje gałąź logarytmu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krzywej $\Gamma \subseteq U$ zachodzi $Ind_\Gamma(0) = 0$.

   (b^*) Pokazać, że jeśli istnieje gałąź pierwiastka, to istnieje gałąź logarytmu.
10. Rozwinąć poniższe funkcje na wszystkich maksymalnie szerokich pierścieniach postaci $P(0,r,R)$, $R \leqslant \infty$ i opisać typ osobliwości:

    (a) $\frac{1}{z(z^2+1)(z-2)}$, (b) $\frac{1}{(z-1)z}$, (c) $Log(\frac{z^2}{z^2-1})$, (d) $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$.
11. Policzyć dla $a=0$ i $a=1$ (a) $\int_{C(a,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$, (b) $\int_{c(a,\frac{1}{2})} \frac{\sin z}{z^2(z-1)^2}dz$.
12. Udowodnić, że jeśli $f \in Hol(P(a,0,R))$ i $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, to $\int_{C(a,\frac{R}{2})} f = 2\pi i A$.
13. Policzyć:

    (a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x+9}dx$, (b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$ dla $a>0$ (Wsk. Pokazać, że $\int_0^\pi e^{-d\sin t}dt < \frac{\pi}{d}$), (c)$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}dt$, (d) $\int_0^\infty \cos x^2 dx$, (e) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + a}$ dla $a>1$, (f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}dx$.

14. Pokazać, że jeśli $f \in Hol(\mathbb{C})$ przedłuża się do $f \in Hol(\widetilde{\mathbb{C}})$, to $f(\infty) = \infty$ lub f jest stała. Pokazać, że f jest wielomianem. (Wsk. Zbadać $f(\frac{1}{z})$ wokół zera.)

15. Używając lematu Schwarza pokazać, że jeśli $f \in Aut(K(0,1))$, to f jest homografią. (Wsk. Pokazać, że jeśli $f(0) = 0$, to $|f(z)| = |z|$.)

16. Zbadać rodzaj osobliwości i policzyć residua, także w ∞:

    (a) $\frac{z^2}{1+e^z} + (\frac{\cos z}{2z-\pi})^2$, (b) $1/\sin\frac{1}{z+1} + z^2 \sin\frac{1}{z}$, (c) $tg\frac{1}{z-i} + \frac{e^{(z+1)^3}-1}{3(z+1)^3} + sinh\frac{1}{z+\pi i}$.

17. Funkcja $f \in Hol(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ jest stała na okręgach $x^2 + y^2 = ax$ dla $a \in \mathbb{R}$. Pokazać, że f jest postaci $e^{g(z)} + C$ i znaleźć możliwe g.

18. Znaleźć $Aut(U)$ dla $U = \{x + iy : |x + iy| < 1, x > 0, y > 0\}$.

19*. Przekształcić $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash(K(-1,1) \cup K(1,1) \cup [-i,i])$ na kółko i na trójkąt.

Karol Palka

Funkcje analityczne LISTA 5 **15.05.2006**

Litery poprzedzają ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania.

A. Zdefiniować $Arcsinh$ za pomocą Log i zbadać obraz pierwszej ćwiartki (Ozn. : (+,+)).

B. Niech $g, h \in Hol(U)$ oraz $Re\ g = -x+3y-xy$ oraz $Re\ h = sinh(ay)\cos x$ dla $a \in \mathbb{R}$. Znaleźć $Im\ g$, $Im\ h$. Znaleźć $g(z)$, $h(z)$ odwołując się tylko do zasady identyczności.

C. Pokazać, że jeśli $\zeta \in Hol(\overline{\mathbb{C}} \setminus S)$ oraz $|S| < \aleph_0$ to suma residuów ζ wynosi zero.

D. Czy funkcja wymierna która jest $1-1$ w $\mathbb{C}$ musi być homografią ?

E. Jeśli $g \in Hol(K(0,R))$, to $M(r) := sup_{|z|=r}|g(z)|$ jest ściśle rosnąca lub stała.

1. Niech $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots$. Zbadać $\lim_{z\to 1^-} f(z)$. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ i $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ istnieje ciąg $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do $\exp(\frac{2k\pi\imath}{2^n})$, taki że $f(z_j) \to \infty$. (Wsk. Wyliczyć $f(z^{2^n}) - f(z)$).

2. Jeśli $|z| > R$, to $\phi(z) = W(z) + \frac{A}{z} + \frac{\varphi(z)}{z^2}$ gdzie $W(z)$ jest wielomianem a $\varphi(z)$ jest holomorficzna oraz ograniczona w ∞. Pokazać, że $res_\infty \phi(z) = -A$. Policzyć :

   (a) $res_\infty Log(\frac{z-a}{z-b})$ (b) $res_\infty \sqrt{(z-a)(z-b)}$ (c) $res_\infty z^3 \cos\frac{1}{z-2}$.

3. Jaka musi być postać funkcji $f \in Hol(U)$ spełniającej $(Ref)^5(Imf)^2 = 1$?

4. Pokazać, że równanie $z\sin z = 1$ ma tylko pierwiastki rzeczywiste (Wsk. zbadać rozwiązania w prostokącie $|Rez| < n\pi + \frac{\pi}{2}, |Imz| < n$).

5. Niech $f(z)$ będzie meromorficzna w $\mathbb{C}$ z biegunami w $z_1, \ldots, z_m \notin \mathbb{Z}$. Pokazać, że jeśli $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ to:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=-N}^{N} f(i) = -\sum_{i=1}^{m} res(z_i, \frac{\pi f(z)}{\operatorname{tg}\pi z}) \text{ oraz } \lim_{N\to\infty}\sum_{i=-N}^{N}(-1)^i f(i) = -\sum_{i=1}^{m} res(z_i, \frac{\pi f(z)}{\sin\pi z}).$$

   (Wsk. Całkować $\pi f(z)\operatorname{ctg}\pi z$ po brzegu kwadratu o wierzchołkach $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm \imath)$.)

6. Ile pierwiastków w $K(0,1)$ mają równania:

   (a) $3e^{z-1} + z^9 + 5z^4 = 0$ (b) $10e^{\cos z} + z^8 = 0$? (c) $\cos z + z^9 + 4z^3$ (d) $e^z = z$?

7. Wyprowadzić rozwinięcia: (a) $\pi\operatorname{tg}\pi z = 2z\sum_{n+0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^2 - z^2}, z+\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ (b) $\frac{\pi}{\cosh\pi z} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1/2)}{(n+1/2)^2+z^2}, z+\frac{\imath}{2} \notin \mathbb{Z}$, (c*) $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ dla $Re\ z > 0$.

8. Pokazać, że: (a) $z^5 + 2z^3 + 2\imath z + 3$ ma w $(+,+)$ jedno zero (b) $z^8 + 3z^3 + 7z + 5$ ma w $(+,+)$ dwa zera (c) $z^4 + 3z + 3$ ma jedno zero w pasie $0 < Imz < 1$ (d) $z^4 + iz + 1$ ma jedno zero w $(+,+)$ i cztery w kole $K(0, \frac{3}{2})$.

9. Dla $a \notin \mathbb{Z}$ obliczyć: (a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$, (b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$, (c) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-a^2}$.

10. Podać postać automorfizmów $\mathbb{C} \setminus A_i$, gdzie $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{0, 1\}$, $A_3 = \{0, 1, i\}$.

11. Dla $a > 1$ wykazać: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1+a^2-2a\cos x} = \frac{2\pi}{a} \log \frac{1+a}{a}$. (Wsk. $\frac{z}{a-e^{-iz}}$ na $[-\pi, \pi] \times [0, in]$).

12. Jaka jest ogólna postać automorfizmów: (a) $(+,+)$ (b) $\{z : |z| < 1 \ i \ Imz > 0\}$?

Karol Palka

Funkcje analityczne LISTA 6 **28.05.2006**

1. Rozłożyć na ułamki proste funkcje (a) $\frac{z^2-z+1}{z(z^2-1)^2}$, (b) $\frac{z^2-1}{(z+2)^3(z+3)^4}$.

2. Gdzie są normalne poniższe rodziny funkcji ? (a) $\{g(z) = az : a \in \mathbb{C}\}$ (b) $\{(\frac{z-\imath}{z+\imath})^n, n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\{\frac{1}{z^n}, n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{g \in Hol(K(0,1)) : f(0) = 0, f'(0) = 1\}$

3. Jeśli ψ odwzorowuje konforemnie $P(0,1,r)$ na $P(0,1,R)$, jest ciągła na brzegu i $f(1) = 1$, to $\psi = id$.

4. Dla $f \in Hol(K(0,1) \setminus \{0\})$ wyrazić $res_\infty f$ za pomocą $res_0 g$ dla pewnej funkcji $g(z)$.

5. Niech η będzie meromorficzna na $\overline{K(0,1)}$ i $|f(z)| = 1$ na $C(0,1)$. Pokazać, że η jest wymierna.

6. Funkcja całkowita spełnia $|f'(z)| < |f(z)|$. Jaka jest jej postać ?

7. Policzyć $\int_0^{2\pi} log|re^{\imath\theta} - 2|d\theta$ dla małych r.

8. Wykazać: (a) $\int_0^\infty \frac{\log x dx}{x^2-1} = \frac{1}{4}\pi^2$ (Wsk. $P(0,r,R) \cap (+,+)$) (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$.

9. Niech f odwzorowuje $\{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1 \ i \ y > 0\}$ na $\{x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$ oraz niech przekształca $-1, 0, 1$ odpowiednio na $-2, \infty, 2$. Wyznaczyć postać f.

10. Niech $P_n(z)$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$. Pokazać, że z każdego z poniższych wynika, że P_n zeruje się w $\mathbb{C}$: (a) twierdzenie Liouville'a (b) zasada maksimum (c) obliczenie $Ind_{P_n[C(0,r)]}(0)$ (d) twierdzenie Rouchégo.

11. Niech U będzie obszarem jednospójnym ograniczonym. Pokazać, że nie jest on biholomorficzny z $\mathbb{C}$.

12. Wykazać, że jeśli f odwzorowuje konforemnie prostokąt domknięty na prostokąt, to f jest liniowe.

13. Niech U będzie wnętrzem czterolistnej koniczynki (brzeg jest krzywą Jordana) i niech $a, b \in U$. Jaka jest liczba automorfizmów U, które a przeprowadzają w b ?

14. Policzyć $f'(0)$ dla $f(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nz}{e^n}$, określić obszar zbieżności szeregu.

15. Pokazać, że $f \in Hol(P(0, \frac{1}{2}, 1))$ przedłuża się do $F \in Hol(K(0,1))$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg wielomianów zbieżny niemal jednostajnie do f na $P(0, \frac{1}{2}, 1)$.

16. Znaleźć funkcje całkowite spełniające $|f(z)| < 1 + \sqrt{|z|}$.

17*. Pokazać, że $h(z) = ze^z$ przyjmuje każdą wartość skończoną.

Karol Palka

Sprawdzian zaliczający ćwiczenia z FA **06.06.2006**

Na zaliczenie trzeba zrobić co najmniej trzy zadania, w tym zadanie 5 lub 6 oraz odpowiedzieć na pytania w zadaniu 7.

1. (a) W których z poniższych obszarów istnieje ciągła gałąź Log z ? Odpowiedź uzasadnić:

   (i) $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Imz = Rez, Rez \geqslant 0\}$,

   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 3\}$,

   (iii) $\{z \in \mathbb{C} : Rez + Imz > 0\}$;

   (iv) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z-1| < 3\}$

   (b) W każdym przypadku, gdy taka gałąź istnieje, obliczyć jej wartości dla 1 oraz dla $\imath$.

2. Funkcja f jest holomorficzna w prawej półpłaszczyźnie i $\int_{|z-2|=1} \frac{zf(z)}{(z-2)^n} dz = 0$ dla każdego $n \geqslant 2$. Znaleźć postać f.

3. Obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

4. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $f(z) = \frac{z^3+2z-6}{z^4-3z^3}$ na wszystkich możliwych maksymalnych pierścieniach o środku w 0. Obliczyć $res_\infty f$.

5. Znaleźć obraz kwadratu o wierzchołkach $\pm 1 \pm \imath$ przy funkcji $h(z) = \frac{z-\imath-1}{z+1+\imath}$

6. Znaleźć przekształcenie biholomorficzne pasa $1 < Rez < 2$ na koło jednostkowe.

7.O Odpowiedzieć TAK lub NIE i krótko uzasadnić:

   (i) Niech z_0 będzie osobliwością izolowaną dla f oraz $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$. Stwierdzić, czy z_0 może być osobliwością istotną f.

   (i) Załóżmy że funkcja holomorficzna g jest ograniczona. Nawet jeśli U jest obszarem jednospójnym i ograniczonym, to g nie musi być stała.

   (i) Czy obrazem $|z| < 1$ przy funkcji holomorficznej może być $Rez \geqslant 0$?

   (i) Jeśli γ jest gładką krzywą zamkniętą bez samoprzecięć oraz istnieje taki obszar U, że $\gamma \subseteq U$ oraz $f \in Hol(U)$, to $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Egzamin z Funkcji analitycznych. Część teoretyczna. **23.06.2006**
WERSJA A

Poniżej, jeśli nie zaznaczono inaczej, należy przyjmować domyślnie, że funkcje są holomorficzne, a zbiory są otwarte. Należy zaznaczyć poprawną odpowiedź jak na przykładzie. Za poprawną/żadną/niepoprawną odpowiedź otrzymacie Państwo odpowiednio +1/0/-1 punkt. Zadania, których nie dotyczy tryb T/N, są punktowane w skali podanej przed treścią zadania.

PRZYKŁAD : Funkcje analityczne to przedmiot bardzo przydatny w życiu. **T** **N**

1. Jeśli $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna i ograniczona, to jest stała. **T** **N**
2. Jeśli dla $f : U \to \mathbb{C}^*$, U spójny, $|f|$ przyjmuje min. w U, to f jest stała. **T** **N**
3. Nie istnieje przekształcenie biholomorficzne $K(0, 1)$ na $\mathbb{C}$. **T** **N**
4. Istnieje przekształcenie biholomorficzne pierścienia o promieniach 1 i 2 na prostokąt. **T** **N**
5. Istnieje przekształcenie biholomorficzne $\overline{C}$ z wyciętymi rozłącznymi kołami domkniętymi na pierścień. **T** **N**
6. (0-5p); Wyprowadź twierdzenie Liouville'a z nierówności Cauchy'ego. Sformułuj twierdzenie i nierówność.
7. Funkcja $\frac{1}{\sin z}$ ma w nieskończoności osobliwość izolowaną. **T** **N**
8. Jeśli oba residua mają sens, to $res_\infty f(z) = -res_0 f(\frac{1}{z})$. **T** **N**
9. Istnieje na $\{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\}$ gałąź logarytmu, dla której $Log(-1 + \imath) = ln\sqrt{2} + \imath\frac{9\pi}{4}$ **T** **N**
10. Automorfizm holomorficzny ćwiartki zachowuje zbiór $\{0, \infty\}$. **T** **N**
11. Jeśli γ jest gładką krzywą bez samoprzecięć oraz istnieje takie U, że $\gamma \subseteq U$ oraz $f \in Hol(U)$, to $\int_\gamma f(z)dz = 0$. **T** **N**
12. Funkcja $\exp z$ przekształca górną półpłaszczyznę na siebie. **T** **N**
13. Funkcja rzeczywista $log|z| : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna. **T** **N**
14. Homografie zachowują kąty na całym $\overline{\mathbb{C}}$. **T** **N**

15. Funkcja na $\overline{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wymierna. **T** **N**

16. Jeśli f spełnia $f'_{|U} \neq 0$, to f ma na U funkcję odwrotną. **T** **N**

17. Każdy automorfizm $K(1,1)$ jest homografią. **T** **N**

18. (0-2p) Na co funkcja Żukowskiego $\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ przekształca górną półpłaszczyznę z wyciętym $\overline{K(0,1)}$?

19. Punkty z i w są symetryczne względem okręgu $C(a,r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(z-a)\overline{(w-a)} = r^2$. **T** **N**

20. Jeśli w pewnym obszarze funkcja nie ma funkcji pierwotnej, to musi istnieć zawarty w nim kontur, po którym całka z tej funkcji nie znika. **T** **N**

21. Niech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Funkcja f spełniająca $Imf = \alpha(Ref)$ jest stała. **T** **N**

22. Obrazem $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 5\}$ przy funkcji holomorficznej może być $\{z \in \mathbb{C} : Rez \geqslant 3\}$. **T** **N**

23. Jeśli dwie funkcje całkowite pokrywają się na ograniczonym zbiorze przeliczalnym, to są równe. **T** **N**

24. Jeśli funkcja określona na jednospójnym obszarze nieograniczonym jest ograniczona to jest stała. **T** **N**

25. Funkcja całkowita, która na kole jednostkowym opisana jest wzorem $z^7 + z - 1$ może mieć w $\mathbb{C}$ nieskończenie wiele zer. **T** **N**

26. Jeśli funkcja określona na $K(0,1)$ spełnia $f(0) = 0$ i $|f(z)| < 3$, to nie jest możliwe, żeby $f(\frac{1}{4}) = \imath$. **T** **N**

27. (0-5p) Wyprowadź zasadnicze twierdzenie algebry z tw. Rouche'go.

28. Jeśli funkcja całkowita ma niezerową, ale skończoną liczbę zer, to jest wielomianem. **T** **N**

Egzamin z Funkcji analitycznych. Część teoretyczna. **23.06.2006**
WERSJA B

Poniżej, jeśli nie zaznaczono inaczej, należy przyjmować domyślnie, że funkcje są holomorficzne, a zbiory są otwarte. Należy zaznaczyć poprawną odpowiedź jak na przykładzie. Za poprawną/żadną/niepoprawną odpowiedź otrzymacie Państwo odpowiednio +1/0/-1 punkt. Zadania, których nie dotyczy tryb T/N, są punktowane w skali podanej przed treścią zadania.

PRZYKŁAD : Funkcje analityczne to przedmiot bardzo przydatny w życiu. **T** **N**

1. Funkcja rzeczywista $log|z| : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna. **T** **N**
2. Nie istnieje przekształcenie biholomorficzne $K(0,1)$ na $\mathbb{C}$. **T** **N**
3. Funkcja na $\overline{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wymierna. **T** **N**
4. Istnieje przekształcenie biholomorficzne pierścienia o promieniach 1 i 2 na prostokąt. **T** **N**
5. (0-5p); Wyprowadź twierdzenie Liouville'a z nierówności Cauchy'ego. Sformułuj twierdzenie i nierówność.
6. Funkcja $\frac{1}{\sin z}$ ma w nieskończoności osobliwość izolowaną. **T** **N**
7. Istnieje na $\{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\}$ gałąź logarytmu, dla której $Log(-1+\imath) = ln\sqrt{2} + \imath\frac{9\pi}{4}$ **T** **N**
8. Automorfizm holomorficzny ćwiartki zachowuje zbiór $\{0, \infty\}$. **T** **N**
9. (0-5p) Wyprowadź zasadnicze twierdzenie algebry z tw. Rouche'go.
10. Jeśli γ jest gładką krzywą bez samoprzecięć oraz istnieje takie U, że $\gamma \subseteq U$ oraz $f \in Hol(U)$, to $\int_\gamma f(z)dz = 0$. **T** **N**
11. Jeśli $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna i ograniczona, to jest stała. **T** **N**
12. Jeśli oba residua mają sens, to $res_\infty f(z) = -res_0 f(\frac{1}{z})$. **T** **N**
13. Homografie zachowują kąty na całym $\overline{\mathbb{C}}$. **T** **N**
14. Istnieje przekształcenie biholomorficzne $\overline{C}$ z wyciętymi rozłącznymi kołami domkniętymi na pierścień. **T** **N**

15. Każdy automorfizm $K(1,1)$ jest homografią. **T** **N**

16. Jeśli f spełnia $f'_{|U} \neq 0$, to f ma na U funkcję odwrotną. **T** **N**

17. (0-2p) Na co funkcja Żukowskiego $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ przekształca górną półpłaszczyznę z wyciętym $\overline{K(0,1)}$?

18. Punkty z i w są symetryczne względem okręgu $C(a, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(z - a)\overline{(w - a)} = r^2$. **T** **N**

19. Jeśli dla $f : U \to \mathbb{C}^*$, U spójny, $|f|$ przyjmuje min. w U, to f jest stała. **T** **N**

20. Jeśli dwie funkcje całkowite pokrywają się na ograniczonym zbiorze przeliczalnym, to są równe. **T** **N**

21. Niech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Funkcja f spełniająca $Imf = \alpha(Ref)$ jest stała. **T** **N**

22. Jeśli w pewnym obszarze funkcja nie ma funkcji pierwotnej, to musi istnieć zawarty w nim kontur, po którym całka z tej funkcji nie znika. **T** **N**

23. Funkcja $\exp z$ przekształca górną półpłaszczyznę na siebie. **T** **N**

24. Obrazem $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 5\}$ przy funkcji holomorficznej może być $\{z \in \mathbb{C} : Rez \geqslant 3\}$. **T** **N**

25. Jeśli funkcja określona na jednospójnym obszarze nieograniczonym jest ograniczona to jest stała. **T** **N**

26. Jeśli funkcja określona na $K(0,1)$ spełnia $f(0) = 0$ i $|f(z)| < 3$, to nie jest możliwe, żeby $f(\frac{1}{4}) = \imath$. **T** **N**

27. Jeśli funkcja całkowita ma niezerową, ale skończoną liczbę zer, to jest wielomianem. **T** **N**

28. Funkcja całkowita, która na kole jednostkowym opisana jest wzorem $z^7 + z - 1$ może mieć w $\mathbb{C}$ nieskończenie wiele zer. **T** **N**

Egzamin poprawkowy z Funkcji analitycznych. Część teoretyczna. 04.09.2006
WERSJA A

Poniżej, jeśli nie zaznaczono inaczej, należy przyjmować domyślnie, że funkcje są holomorficzne, a zbiory są otwarte. Należy zaznaczyć poprawną odpowiedź jak na przykładzie. Za poprawną/żadną/niepoprawną odpowiedź otrzymacie Państwo odpowiednio +1/0/-1 punkt. Zadania, których nie dotyczy tryb T/N, są punktowane w skali podanej przed treścią zadania.

PRZYKŁAD : Teorii strun można się nauczyć na muzykologii. **T** **N**

1. Niech $f \in Hol(intK(0,1))$. Dla prawie wszystkich $x \in C(0,1)$ istnieje zbiór otwarty U, taki że $x \in U$ i f ma holomorficzne przedłużenie na U. **T** **N**
2. Jeśli $f \in Hol(cl(U))$ oraz $V = f[U]$, to $f(\partial U) \subseteq \partial V$. **T** **N**
3. Jeśli $f \in Hol(cl(U))$ oraz $V = f[U]$, to $f(\partial U) \supseteq \partial V$. **T** **N**
4. Niech $U = K(0,2) \setminus \{-1,1\}$ i niech $\gamma : C(0,1) \to \Gamma \subseteq U$ będzie dyfeomorfizmem. Dla $g \in Hol(U)$ całka $\int_\gamma g(z)dz$ może przyjmować co najwyżej 7 różnych wartości. **T** **N**
5. Jeśli brzeg jednospójnego ograniczonego obszaru U nie jest krzywą Jordana, to U nie musi być biholomorficzne z $K(0,1)$. **T** **N**
6. Jeśli funkcja holomorficzna nigdzie nie znika, to jest kwadratem innej funkcji holomorficznej. **T** **N**
7. Jeśli f jest całkowita, to co najmniej jedna z funkcji $f, \frac{1}{2f}$ przedłuża się do funkcji holomorficznej na $\overline{\mathbb{C}}$. **T** **N**
8. Funkcja e^{e^z} nie przyjmuje dokładnie dwóch wartości zespolonych. **T** **N**
9. Funkcja $\cos z$ przekształca pas $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times (-1,1)$ na półelipsę. **T** **N**
10. W obszarze wypukłym nie zawierającym zera istnieje gałąź logarytmu. **T** **N**
11. Jeśli $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, to $res_\infty f = 0$. **T** **N**
12. Jeśli prostokąt domknięty P jest przekształcany holomorficznie na prostokąt domknięty P', to środek P przechodzi na środek P'. **T** **N**
13. Jeśli $f \in Hol(K(0,1) \setminus \{0\})$ i $r < 1$, to $\int_0^{2\pi} f(re^{\imath t})dt$ nie zależy od r. **T** **N**

14. Dla krzywej zamkniętej Γ zachodzi $2\pi\imath\ Ind_{f(\Gamma)}(0) = \int_\Gamma \frac{f}{f'} dz$. **T** **N**

15. Niech $(u,v) = (Ref, Imf)$ Jeśli na zbiorze otwartym zachodzi $3u^4 - 2\imath\ v^3u + vu - 3 = 0$, to f jest ograniczona. **T** **N**

16. Automorfizm holomorficzny prostokąta zachowuje zbiór wierzchołków. **T** **N**

17. Obszar $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ma skończenie wiele automorfizmów. **T** **N**

18. Funkcja $\frac{z}{\sin z}$ ma w ∞ istotną osobliwość . **T** **N**

19. (0-5p) Niech U będzie obszarem o gładkim brzegu. Pokazać, że jeśli każda nieznikająca funkcja na U ma gałąź logarytmu to U jest jednospójny.

20. Granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych jest funkcją holomorficzną. **T** **N**

21. (0-5p) Sformułować i udowodnić twierdzenie Casorattiego-Sochockiego -Weierstrassa charakteryzujące punkty istotnie osobliwe.

22. Istnieje przekształcenie biholomorficzne $K(0,1)$ na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{\imath\theta} : |\theta| < 1\}$. **T** **N**

23. Istnieje przekształcenie holomorficzne $\mathbb{R} \times (-1,1)$ na pierścień. **T** **N**

24. Pomiędzy dowolnymi dwoma trójkątami istnieje nieskończenie wiele przekształceń biholomorficznych które zachowują środek ciężkości. **T** **N**

25. Jeśli oba residua mają sens, to $res_\infty f(\frac{1}{z}) = -res_0\ z^2 f(z)$. **T** **N**

26. Istnieje na $\{z \in \mathbb{C} : Imz + Rez > 0\}$ gałąź logarytmu, dla której $Log(-1+\imath) = ln\sqrt{2} - \imath\frac{3\pi}{2}$ **T** **N**

27. Jeśli $z_0 \in U$ to funkcja $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus K(0,1)$ ma w z_0 biegun lub osobliwość pozorną. **T** **N**

28. Jeśli funkcja określona na $K(0,1)$ spełnia $f(0) = 0$ i $|f(z)| < \sqrt{5}$, to nie jest możliwe, żeby $f(\frac{1}{2}) = \frac{1+\sqrt{3}\imath}{16}$. **T** **N**

29. Jeśli dla $f \in Hol(K(0,2) \setminus \{0\})$ granica $lim_{z\to\infty} f(\frac{1}{z})$ nie istnieje, to dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z^n} dz \neq 0$. **T** **N**

30. Dla pewnego $a < 0$ zachodzi $e^a \cos a \in Im(1+\imath)^{1+\imath}$. **T** **N**

Egzamin z FA (wykład M.Korasa, sem. letni 2005/2006). Szkice rozwiązań.

1. Znaleźć przekształenie biholomorficzne φ zbioru $\{z \in C : Im\ z > 0\}$ na zbiór $\{z \in C : |z| < 1\}$ takie, że $\varphi(i) = 0$ i $arg\ \varphi'(i) = \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie: Poszukamy odpowiedniej homografii h. Homografia spełniająca $h(\imath) = 0$ przekształca prostą rzeczywistą na okrąg o środku w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy punkt symetryczny do $\imath$ względem tej prostej przechodzi na punkty symetryczny względem 0 do okręgu. Czyli $h(z) = k\frac{z-\imath}{z+\imath}$. Wystarczy dobrać odpowiednie k.

Uwaga: Napisanie wzoru (lub wyznaczenie go z warunków koniecznych) to oczywiście za mało, należy sprawdzić jeszcze, że odpowiednia homografia faktycznie spełnia warunki zadania.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje holomorficzne f takie, że
(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{**}$, $\mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(c) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ i f różnowartościowe.

Rozwiązanie: 2a. Pierwszym przykładem przekształcenia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, który powinien przyjść na myśl jest e^z, ale skoro e^z, równie dobrze $e^{g(z)}$, dla dowolnej całkowitej funkcji g. Pozostaje pytanie dlaczego nie ma innych możliwości ? Trzeba po prostu zdefiniować g jako $Log f$. Tu natrafiamy na chwilową trudność, bo przecież obraz f leży właściwie dowolnie w $\mathbb{C}^*$, a tam nie da się zdefiniować Log, bo nie da się zdefiniować arg. Intuicyjnie jest jednak jasne, że skoro f ma dziedzinę topologicznie ściągalną ($\mathbb{C}$), to musi to $\mathbb{C}$ "nawijać" wokół 0, co powinno pozwolić zdefiniować arg w zależności od ilości nawinięć. Żeby uczciwie zdefiniować g, trzeba sobie uświadomić, że musiałoby zachodzić $g' = \frac{f'}{f}$, zatem definiujemy g jako funkcję pierwotną do $\frac{f'}{f}$. Tak można, bo na obszarze jednospójnym każda funkcja holomorficzna ma pierwotną. Dla pełności wywodu przypomnijmy dowód ostatniego faktu. Definiujemy funkcję pierwotną do funkcji holomorficznej h jako $H(z) = \int_\gamma h(w)dw$, gdzie γ jest dowolną krzywą łączącą 0 i z. Niezależność całki od wyboru γ wynika właśnie z jednospójności.
2b. Tylko stałe, zgodnie z małym twierdzeniem Picarda.
2c. Zgodnie z faktem z wykładu f jest homografią (meromorficzność wynika z tw. Sochockiego-Weierstrassa), stąd $f(z) = kz$ lub $\frac{k}{z}$ dla $k \in \mathbb{C}^*$.

3. Przedstawić funkcję $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ w postaci sumy szeregu Laurenta w każdym możliwym pierścieniu o środku w 0. Znaleźć $res_\infty f$.

Rozwiązanie: Rozkład na ułamki proste $f(z) = \frac{1}{4}(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z+1)^2})$ uzyskuje się najszybciej metodą Cauchy'ego (badając części główne wokół biegunów). Teraz $\frac{1}{z-1}$ (podobnie $\frac{1}{z+1}$) rozwijamy jako $-1 - z^2 - z^3 - ...$ lub jako $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ...)$ w zależności o tego, czy dziedziną jest $K(0,1)$ czy $P(0,1,\infty)$. Rozwinięcia $\frac{1}{(z+1)^2} = (\frac{-1}{z+1})'$ uzyskujemy różniczkując rozwinięcia $\frac{1}{z+1}$. Ostatecznie:
na $K(0,1)$: $f(z) = -z + z^2 - 2z^3 + 2z^4 - 3z^5 + 3z^6 - ...$,
na $P(0,1,\infty)$: $f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^6} - \frac{3}{z^7} + ...$
Drugie rozwinięcie można też uzyskać prościej, jeśli zauważymy, że $f(z) = -\frac{1}{z}f(\frac{1}{z})$. Ponieważ res_∞ można policzyć jako -(współczynnik przy $\frac{1}{z}$ w rozwinięciu wokół ∞), to widać od razu, że $res_\infty f = 0$.

4. Ile zer ma wielomian $z^{19} - z^{13} + iz + 1$ w pierwszej ćwiartce?

Rozwiązanie: Typowe rozwiązanie używa oczywiście zasady argumentu. Liczymy jego przyrost na odcinkach $[0,R]$, $[\imath R, 0]$ oraz na dodatnio zorientowanym łuku okręgu o promieniu R, oznaczmy go γ_R. Łatwo zauważyć, że wielomian $P(z) = z^{19} - z^{13} + \imath z + 1$ nie zeruje się na wybranych odcinkach, dla dużych R nie zeruje się też na γ_R. Po pierwsze należy sobie uświadomić, że liczenie przyrostu argumentu na krzywej NIE sprowadza się do liczenia argumentu w granicach. Trzeba uzasadnić najpierw, że krzywa nie obiega zera. Zauważamy więc, że na odcinku $[0,R]$ mamy $ImP(z) \geqslant 0$, czyli $P([0,R])$ nie obiega zera. Podobnie na $[\imath R, 0]$, ponieważ $z = \imath y$, mamy $P(z) = -\imath y^{19} - \imath y^{13} - y + 1$, czyli $ImP(z) \leqslant 0$.

$$\text{Liczymy} : argP(R) = argR^{19} + arg(1 - \frac{1}{R^6} + \frac{\imath}{R^{18}} + \frac{1}{R^{19}}) \to argR^{19} + arg1 = 0.$$

$$\text{Podobnie} : argP(\imath R) = arg(-\imath R^{19}) + arg(1 + \frac{1}{R^6} - \frac{\imath}{R^{18}} + \frac{\imath}{R^{19}}) \to arg(-\imath R^{19}) = -\frac{\pi}{2}.$$

(Może być też $\frac{3}{2}\pi$, jeśli ktoś wybrał gałąź argumentu, dla której arg na osi rzeczywistej jest równy 2π.) Skoro $argP(0) = 0$, to przyrost argumentu na $[0,\infty]$ wynosi 0, a na $[\imath\infty, 0]$ wynosi $\frac{\pi}{2}$. Na krzywej γ_R mamy $z = Re^{\imath t}$ dla $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, więc $\Delta arg =$

$$\Delta arg(R^{19}e^{\imath 19t}) + \Delta arg(1 - \frac{1}{R^6 e^{\imath 6t}} + \frac{\imath}{R^{18}e^{\imath 18t}} + \frac{1}{R^{19}e^{\imath 19t}}) \to \Delta arg(R^{19}e^{\imath 19t}) = \frac{19}{2}\pi.$$

Otrzymujemy liczbę zer w pierwszej ćwiartce równą $\frac{1}{2\pi}(0 + \frac{1}{2}\pi + \frac{19}{2}\pi) = 5$.

5. Funkcja f jest całkowita i przekształca okrąg $|z| = 1$ w oś rzeczywistą. Wykazać, że f jest stała.

Rozwiązanie: Funkcja f obcięta do $\overline{K(0,1)}$ przekształca $K(0,1)$ na pewien obszar U, którego brzeg zawarty jest w osi rzeczywistej. Zgodnie z zasadą odbicia Schwarza wzór

$\widetilde{f}(z) = f(z)$ dla $z \in \overline{K(0,1)}$ oraz $\widetilde{f}(z) = f(z^*)^*$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K(0,1)}$ definiuje funkcję holomorficzną. Ponieważ f i $\widetilde{f}$ pokrywają się na $K(0,1)$, to są równe. Wewnętrzna gwiazdka to symetria względem $C(0,1)$, a zewnętrzna względem $\mathbb{R}$, czyli druga część definicji to po prostu $f(z) = \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$, zatem f przekształca $\mathbb{C}$ w $U \cup \overline{U}$. Ostatni zbiór jest ograniczony, bo U jest, czyli twierdzenie Liouville'a daje tezę zadania.

Uwaga: Chwila zastanowienia nad tym, jak może wyglądać obszar $U = f(K(0,1))$ prowadzi do innego dowodu. Załóżmy, że f nie jest stała. Z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym wynika, że żaden punkt ∂U nie może być obrazem punktu z $K(0,1)$. Wnioskujemy, że U jest ograniczonym (bo $f(\overline{K(0,1)})$ jest zwarty) obszarem o brzegu zawartym w $\mathbb{R}$. Takich obszarów oczywiście nie ma (łatwe ćwiczenie z topologii I).

6. Czy istnieje funkcja f holomorficzna w otoczeniu 0 taka, że
(a) $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^2}$.
(b) $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^3}$.
(c) $f(\frac{1}{n})^3 = nf(\frac{1}{n}) - in^2 f(\frac{1}{n}) + in^3$
Jeśli istnieje to wyznaczyć wszystkie takie funkcje.

Rozwiązanie: Punkt (a) spełnia funkcja z^2, a skoro f i z^2 pokrywają się na zbiorze mającym punkt skupienia, to są równe. Część warunku (b) ($f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$) spełnia funkcja z^3, więc znów f i z^3 musiałyby być równe, jednak druga część warunku daje sprzeczność. Jeśli w warunku (c) podzielimy obie strony przez n^3 i korzystając z tego, że f jest ciągła w zerze, policzymy granicę przy $n \to \infty$ dostaniemy równość $0 = 0 - 0 + \imath$, czyli sprzeczność.

7. Sklasyfikować izolowane punkty osobliwe (łącznie z ∞) funkcji

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^2-4)^2 \cos(\frac{1}{z-2})}.$$

Rozwiązanie: Punkty, które mogą być izolowanymi osobliwościami to $-2, 2, 2 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}, \infty$. Ponieważ punkty $2 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ są, jak łatwo sprawdzić, jednokrotnymi zerami $\cos\frac{1}{z-2}$, to są one biegunami rzędu pierwszego dla funkcji f. Wobec tego punkt 2, jako punkt skupienia biegunów, nie jest osobliwością izolowaną. Punkt -2 jest biegunem rzędu drugiego. Pisząc $f(z) = z^3 \frac{z^4}{(z^2+4)^2 \cos\frac{1}{z-2}}$ widzimy, że drugi czynnik dąży w nieskończoności do 1, czyli jest holomorficzny. Stąd typ osobliwości f w nieskończoności jest taki, jak typ z^3: biegun stopnia trzeciego.

8. Obliczyć całkę

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx$$

Rozwiązanie: Powinno być jasne, że należy użyć twierdzenia o residuach. Okazuje się, że nie jest dobrym pomysłem całkowanie funkcji $\frac{z \sin z}{z^4+1}$ po krzywej zamkniętej (kto nie spróbuje i nie sprawdzi dlaczego, nie wpadnie na to następnym razem). Decydujemy się więc całkować $F(z) = \frac{ze^{\imath z}}{z^4+1}$, której częścią urojoną na osi rzeczywistej jest nasza funkcja. Stosujemy typowe podejście, mianowicie całkujemy F po krzywej $[-R, R] + \gamma_R$, gdzie γ_R jest dodatnio zorientowanym półokręgiem. Weźmy najpierw całkę po γ_R: $z = Re^{it}$ dla $t \in [0, \pi]$. Szacujemy:

$$|\int_{\gamma_R} F(z)dz| = |\int_0^{\pi} \frac{Re^{\imath t}e^{\imath Re^{\imath t}}}{R^4e^{4\imath t}+1} R\imath e^{\imath t}dt| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{-R\sin t}}{|R^4e^{4\imath t}+1|}dt = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin t}}{|e^{4\imath t}+\frac{1}{R^2}|}dt.$$

Łatwo widać, że w licznik jest ograniczony z góry przez 1, a mianownik z dołu np. przez $\frac{1}{2}$ (dąży do 1 dla dużych R), stąd ostatnia całka jest ograniczona, więc całość zbiega do 0. Ponieważ wybrana krzywa otacza tylko dwa z czterech punktów osobliwych funkcji F, z twierdzenia o residuach otrzymujemy $J = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{\infty} F(z)dz = Im\ \pi\imath(res_A F + res_B F)$, gdzie $A = e^{\imath \frac{\pi}{4}}$, $B = e^{\imath \frac{3\pi}{4}}$. Zauważając, że A i B są biegunami rzędu pierwszego dla F wylicza się: $J = \pi\ Re(res_A F + res_B F) = \pi\ Re(-\frac{\imath}{4}e^B + \frac{\imath}{4}e^{-A}) = \frac{\pi \sin 1/\sqrt{2}}{2 \exp 1/\sqrt{2}}$.

Uwaga: Ostatnie wyliczenie ma oczywiście najmniejszy wpływ na ocenę zadania.

Karol Palka