

Egzamin z Funkcji Analitycznych I, 29.01.2011

Proszę wybrać 6 zadań. Należy podawać wyczerpujące objaśnienia. Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

1. Znaleźć wszystkie homografie, które przekształcają zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ na siebie.

2. Obliczyć całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3 \sin x - 5 \cos x} dx.$$

Wsk. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Całkować przez podstawienie.

3. Ile zer ma wielomian $z^{17} + z^{11} - iz + 1$ w pierwszej ćwiartce?

Wsk. Badać przyrost argumentu wzdłuż krzywej składającej się z odcinka $[0, R]$, łuku od R do iR i odcinka $[iR, 0]$ dla $R \rightarrow \infty$. Ponadto $\Delta_\gamma \arg fg = \Delta_\gamma \arg f + \Delta_\gamma \arg g$.

4. Przedstawić funkcję $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^2}$ w postaci sumy szeregu Laurenta w każdym możliwym pierścieniu o środku w 0. Znaleźć $\operatorname{res}_\infty f$.

5. Sklasyfikować izolowane punkty osobliwe w $\tilde{\mathbb{C}}$ funkcji

$$f(x) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)^2} + z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

Obliczyć residuum funkcji w 0 i w $2i$.

6. Niech f będzie holomorficzną w kole $K(0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Przypuśćmy, że $M = \sup_{z \in K(0; R)} |f(z)| < \infty$ i $f(0) = 1$. Wykazać, że $|f(z) - 1| \leq \frac{M+1}{R}|z|$.

7. Przypuśćmy, że funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną i przekształca pewien okrąg w okrąg. Wykazać, że istnieją $a \in \mathbb{R}, a > 0, b, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$f(z) = a(z+b)^n + c.$$

Wsk. Można sprowadzić do przypadku gdy f przekształca okrąg $|z| = 1$ na $|z| = 1$. Funkcję f obciąć do koła $|z| \leq 1$ rozszerzyć na płaszczyznę stosując symetrię względem okręgu (zasada symetrii Schwarza.)

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.

Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie - 25 punktów

1. (A) Wyjaśnić, w jakich punktach funkcja $f(z) = |e^z| \cdot \cos(iz)$ ma pochodną zespoloną.

(B) Znaleźć całkę $\int_{[i\frac{\pi}{2}, \ln 2]} \cos(iz) dz$.

(C) Znaleźć całkę $\int_{[i\frac{\pi}{2}, \ln 2]} \overline{\cos(iz)} dz$.

2. Znaleźć całkę $\int_{\gamma} \frac{z^2 \operatorname{Log} z}{(z - z_0)^3} dz$, gdzie

γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$, gdzie

$w_0 = 2$, $w_1 = -2 + 4i$, $w_2 = \frac{1}{2} + 4i$, $w_3 = \frac{1}{2}$ oraz

(A) $z_0 = 3i$ (B) $z_0 = i$ (C) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

3. Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną taką, że $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Pokazać, że

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{(1-|z|)^2}.$$

Wskazówka. Dla ustalonego $z \in D$ rozpatrzeć koło o środku w z i promieniu $\frac{1}{2}(1-|z|)$.

4. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 2\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1]\}$, $\partial G = \{z \in G : \operatorname{Re} z \in \{0, 1\}\}$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, ograniczoną na G .

(A) Pokazać, że jeśli $|f(z)| \leq 1$ dla $z \in \partial G$, to także $|f(z)| \leq 1$ dla $z \in G$.

Wskazówka. Niech $\sup\{|f(z)| : z \in G\} = c$. Dla każdego $r > 0$ rozpatrzeć funkcję $\frac{f(z)}{1+rz}$ na prostokącie $\{z \in G : |\operatorname{Im} z| \leq \frac{c}{r}\}$.

(B) Niech $\sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z = 0\} = 1$, $\sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z = 1\} = 2$. Pokazać, że $\sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \leq \sqrt{2}$.

Wskazówka. Rozpatrzeć funkcję $f(z) \cdot \exp(-z \ln 2)$ i skorzystać z (A).

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.

Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie - 25 punktów

1. Przyjmijmy $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ i niech $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ będzie gałęzią główną logarytmu.

(A) Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z) = (z-1) \cdot \text{Re}(\text{Log} z)$ i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną zespoloną.

(B) Sprawdzić, że $z(\text{Log} z - 1)$ jest funkcją pierwotną dla $\text{Log} z$ i znaleźć całkę $\int_{[-i,1]} \text{Log} z \, dz$.

(C) Znaleźć całkę $\int_{[-i,1]} \overline{\text{Log} z} \, dz$.

2. Znaleźć całki $\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi e^{iz})}{(z-\pi)^2} dz$, gdzie

(A) $\gamma(t) = \pi + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(B) γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1] \cup [w_1, w_2] \cup [w_2, w_3] \cup [w_3, w_0]$, gdzie $w_0 = -i$, $w_1 = i$, $w_2 = 4$, $w_3 = -4 - i$.

3. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $u = \text{Re} f$, $v = \text{Im} f$, będzie funkcją holomorficzną w kole $D = \{z : |z| < 2\}$ i niech $\text{Re}(f(0)^2) = 0$. Pokazać, że

$$\int_0^{2\pi} (u(e^{it}))^2 dt = \int_0^{2\pi} (v(e^{it}))^2 dt.$$

Wskazówka. Rozpatrzeć wzór Cauchy'ego dla funkcji $(f(z))^2$.

4. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną w otwartym zbiorze spójnym U zawierającym $D = \{z : |z| \leq 1\}$. Pokazać, że jeśli f nie jest funkcją stałą, to istnieje $z_0 \in \partial D$ takie, że $\text{Re} f(z) < \text{Re} f(z_0)$ dla $z \in D \setminus \partial D$ i wykazać, że dla takiego punktu z_0 , $\text{Im}(z_0 \cdot f'(z_0)) = 0$.

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.

Wszystkie kartki należy podpisać.

Każde zadanie - 25 punktów (A - 15p, B - 10p.)

1. Określić, podając krótkie uzasadnienie, liczbę pierwiastków, liczonych wraz z krotnościami, wielomianu $z^5 + 4z^3 + z^2 + 1$

(A) w pierścieniu $\{z : 1 < |z| < 3\}$,

(B) w półpłaszczyźnie $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

2. Znaleźć całkę $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-2i)(1-\cos z)}$, gdzie

(A) $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(B) γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, \dots, w_7, w_0]$, o wierzchołkach $w_0 = 1$, $w_1 = -2 + 3i$, $w_2 = 2 + 3i$, $w_3 = -2 - i$, $w_4 = 2 - i$, $w_5 = 2 + i$, $w_6 = -2 + i$, $w_7 = -i$.

3. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 1 \text{ oraz } \operatorname{Im} z > 0\}$. Podać, z krótkim uzasadnieniem, przekształcenie konforemne

(A) obszaru U na pas $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$,

(B) obszaru $U \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0 \text{ oraz } \operatorname{Im} z > 1\}$ na półkole $\{z : |z| < 1 \text{ oraz } \operatorname{Im} z > 0\}$.

4. Przyjmijmy oznaczenia $D = \{z : |z| < 1\}$ oraz $D_r = \{z : |z| < r\}$ dla $r \in (0, 1)$.

(A) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, $f(0) \neq 0$ i niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Pokazać, że jeśli $|a| > \sup\{|\frac{f(z)}{z^m}| : |z| = r\}$, to równanie $\frac{f(z)}{z^m} = a$ ma w kole D_r m pierwiastków, przy czym dla dostatecznie małych r - wszystkie jednokrotne.

[Wskazówka: Zastosować zasadę argumentu do funkcji $\frac{f(z)}{z^m} - a$ i pętli $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$]

(B) Niech $g : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, mającą w zerze biegun rzędu m . Pokazać, że $m = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r > 0$ takie, że g przekształca konforemnie $D_r \setminus \{0\}$ na $g(D_r \setminus \{0\})$.

(2)