BBB **Egzamin**

Imię:

Nazwisko:

Odpowiedzi na pytania z ♠ należy uzasadniać

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n n^5}{4^n n^3}$ — 0

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^6)}{x^6}$ — 4

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1+2x)}{x}$ — 0

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ — 3

5) Obliczyć pochodną $(\cos(x)\ln(x))'$ — $-\sin(x)\cdot\ln(x) + \cos(x)\frac{1}{x}$

6) Wiemy, że funkcja różniczkowalna zeruje się tylko w punktach -3, 1 i 2. W co najmniej ilu punktach pochodna funkcji musi się zerować? — ≥ 2

7) Wiemy, że druga pochodna funkcji (dwukrotnie różniczkowalnej) jest dodatnia. W co najwyżej ilu punktach funkcja może się zerować? — ≤ 2

♠8) Ile ma pierwiastków wielomian $x^{11} + 11x + 1$? $= f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, zatem z tw. Darboux istnieje x taki, że $f(x) = 0$.

Pochodna $f'(x) = 11x^{10} + 11 > 0$. Zatem f jest rosnąca i może się zerować tylko w jednym punkcie.

odp: 1

♠9) Dana funkcja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 3$. Znaleźć $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$.

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 3 \Rightarrow \exists x_0 \ \forall x \geq x_0 \ f'(x) \geq 2$.

Zatem $f(x) \geq 2(x - x_0) + f(x_0)$ dla $x \geq x_0$

Stąd $f(x) - x \geq 2(x - x_0) + f(x_0) - x = x + \text{stała}$ dla $x \geq x_0$

Wniosek: $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) \geq \lim_{x\to+\infty}(x + \text{stała}) = +\infty$

B

♠10) Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takiej, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

np $f(x) = \ln(x^2+1)$ $\qquad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

lub $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Obie te funkcje są określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

---

11) O funkcji $f : [0, 10] \to \mathbf{R}$ wiemy, że: $f(2) = f(4) = 0$, $f'(3) = f'(7) = 0$, $f''(5) = 0$. W których punktach wystarczy sprawdzić wartość f, aby znaleźć $\min(f)$ i $\max(f)$? f, f', f'' w pozostałych punktach $\neq 0$.

0, 3, 7, 10 ⊛

---

12) Wypisać 6 pierwszych wyrazów (tzn aż do a_5x^5) rozwinięcia Taylora funkcji $f(x) = \cos(3x^2)$ w punkcie $x_0 = 0$.

$1 + \underset{x}{0} + \underset{x^2}{0} + \underset{x^3}{0} - \frac{9}{2}x^4 + \underset{x^5}{0}$

bo cos(x)=1− ½ x^2 + ...

---

13) Dla $f(x, y) = x^3y$ obliczyć pochoną kierunkową w punkcie $(1, 3)$ w kierunku wektora $(1, 0)$?

9

---

14) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\text{grad}(f) = 0$ oraz $D^2f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie może być lokalne ekstremum? Jakie?

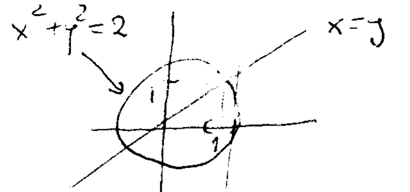
Nie

---

15) Ile jest funkcji ciągłych $y(x)$ dla $x \in (-\frac{1}{11}, \frac{1}{11})$ spełniających warunki: $y(0) = \sqrt{2}$ oraz $(x - y(x))(x^2 + y(x)^2 - 2) = 0$.

1

♠16) Ile jest funkcji ciągłych $y(x)$ dla $x \in (\frac{8}{11}, \frac{12}{11})$ spełniających warunki: $y(1) = 1$ oraz $(x - y(x))(x^2 + y(x)^2 - 2) = 0$. $\iff$ $x - y = 0$ lub $x^2 + y^2 - 2 = 0$



Poza punktem $(1,1)$ dla $x \in (\frac{8}{11}, \frac{12}{11})$ y można wyznaczyć na 3 sposoby: - albo $x = y$, albo y należy do dolnego łuku okręgu, albo y należy do górnego łuku. Funkcja y(x) ma być ciągła, więc decydujemy czy y ∈ prostej czy do górnego łuku osobno dla $x < 1$ i dla $x > 1$. Odpowiedź: 4

⊛ Ponieważ treść zadania była zmieniana uznaję także odpowiedź: 3, 7

AAA **Część 2**

Imię:

Nazwisko:

---

17) Zbior A w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ opisany jest dwoma równaniami $g(x) = 0$ i $h(x) = 0$. Punkt p należy do A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. Czy w p może być ekstremum jeśli: $\mathrm{grad}(f)(p) = (1, 0, 0, 1)$, $\mathrm{grad}(g)(p) = (3, 0, 1, 0)$, $\mathrm{grad}(h)(p) = (6, 0, 2, 0)$.

TAK

---

18) Czy zbiór A jest zwarty ?

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + 4y^2 = 7\,,\, x + 2y + 3z = 11\,\}$$

TAK

♠19) Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \,\sin(3x)\, dx$

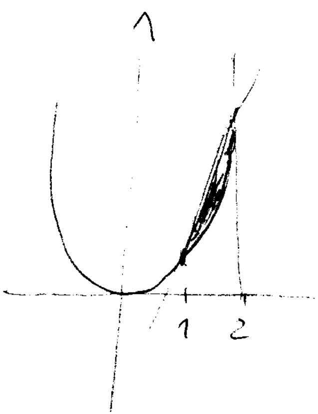
$$\int \underset{f}{x}\ \underset{g'}{\sin(3x)}\, dx = -x \cdot \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + C$$

♠20) Obliczyć pole figury zawartej pomiędzy parabolą a prostą $y = x^2$ i $y = 3x - 2$.

Punkty precięcia: $y = x^2 = 3x - 2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \ \vee 2$$



$$\text{Pole} = \int_1^2 (3x - 2 - x^2)\, dx =$$

$$= \cancel{\int} \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \left(\frac{3}{2}\cdot 4 - 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

A

21) Sformułować Twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów.

- Niech $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną na odcinku domkniętym. Wtedy istnieją takie x_{min} i $x_{max} \in [a,b]$, że dla każdego $x \in [a,b]$ $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$.
- Dla funkcji wielu zmiennych odcinek domknięty w sformułowaniu twierdzenia jest zastąpiony przez zbiór zwarty.

22) Sformułować Twierdzenie Rolle'a

Niech $f:[a,b]$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną wewnątrz przedziału. Wtedy jeśli $f(a)=f(b)$ to istnieje $c \in (a,b)$, takie, że $f'(c)=0$.

♠23) Ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia następujący warunek:
$\exists g \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbf{N}\;\; |x_n - g| < \varepsilon$
(tzn. Istnieje liczba $g \in \mathbf{R}$ taka, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbf{N}$, dla którego $|x_n - g| < \varepsilon$)
Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny?

Nie musi być zbieżny. Np $x_n = (-1)^n$, $g=1$.

24) **Zadanie na oddzielnej kartce:**
Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ na zbiorze

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0\,,\ z^2 \leq 4\}\,.$$