ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DO KOLOKWIUM II

wersja 2.1

1. Obliczyć pochodne cząstkowe: $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$ gdy:
a) $f(x,y,z) = \ln(x+y)\sin(y+z)$,
b) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz)$.

2. Znaleźć kierunek maksymalnego wzrostu funkcji:
a) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(x+y+z)$ w punkcie (1,2,3),
b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$ w punkcie (1,1,1,1,1).

3a. Znaleźć płaszczyznę styczną do paraboloidy hiperbolicznej (czips zadany równaniem $x^2 - y^2 = z$) w punkcie (1,0,1). Przekonać się, że przecięcie tej płaszczyzny z powierzchnią jest sumą dwóch prostych (jakich ?).

3b. Dana jest powierzchnia zadana równaniem $x^2 + y^2 = z^2$. Znaleźć płaszczyznę styczną do tej powierzchni w punkcie postaci $(x,y,z) = (r\cos(t), r\sin(t), r)$ dla dowolnego t oraz $r \neq 0$. Czy przechodzi ona przez punkt (0,0,0)?

4. Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f. Które z nich są globalnymi ekstremami?
a) $f(x,y,z) = 2xy + 4xz - z^2 - 3x - 2y$,
b) $f(x,y,z) = (x+y+z+1)^2 + (y+z)^3 - z^3 - 3y + 9z$,
c) $f(x,y) = \ln(2 + \sin(x-y) + (x+y)^2)$.

5) Znaleźć supremum i infimum funkcji $f(x,y) = xy - x - 2y$ na zbiorze opisanym nierównościami $x \geq 0$, $y \geq 0$ $x + y \leq 4$.

6) Znaleźć supremum i infimum funkcji $f(x,y) = 3x+y$ na zbiorze opisanym nierównościami $x^3 \geq y^2$, $x \leq 1$.

7) Znaleźć ekstrema funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3\,x + \sqrt{3}\,y$ na kole jednostkowym $x^2 + y^2 \leq 1$.

8) Znaleźć ekstrema funkcji $f(x,y,z) = z^2$ na zbiorze zadanym równaniami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

9) Obliczyć pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ w punkcie x_0 wiedząc, że
a) $2^{xy} = y + 6$, w punkcie $x_0 = 2$, $y(x_0) = 1$,
b) $\sin(x+y) = 2y$, w punkcie $x_0 = 0$, $y(x_0) = 0$.