Zadania z Analizy Matematycznej, cz I (przygotowawcze do kolokwium 20.XI)

Obliczyć granice:

1 $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

2 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{3n+\sqrt{2n+1}}-\sqrt{3n}$

3 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3}-1}{\ln(1+3x)\,\mathrm{tg}(5x^2)}$

4 $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

5 $\lim_{x\to\infty} \ln(e^x+1)\sin(\frac{1}{x})$

6 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{e^{2x}-1-2x}$

7 Wykazać, że równanie $\mathrm{tg}(x)=2x$
(a) ma conajmniej trzy rozwiazania dla $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,
(b) ma dokładnie trzy rozwiązania.

8 Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi. Czy równanie $e^{-x^2}=ax+b$ może mieć więcej niż trzy rozwiązania?

Zróżniczkować funkje

9 $\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^4+1}$

10 $\ln(\ln(\ln x))$

11 $\frac{\cos(\ln(1+x^2))}{x^2e^x}$

12 $x^{\sin(x)}$

13 Zbadać funkcję (zera, lokalne ekstrema, wypukłość, punkty przegięcia, naszkicować wykres), znaleźć maksimum i minimum na przedziale $[-1,3]$): $f(x)=2x^3-9x^2+12x$.

14 Czy funkcja $f(x)=(3-x^2)e^x$ osiąga wartość najwieksza i najmniejszą dla $x\in\mathbf{R}$? Znaleźc przedziały monotoniczności, wypukłości. Naszkicować wykres. (W tym zadaniu można pomagać sobie kalkulatorem.)

15 Czy funkcja $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ osiąga wartość najwieksza i najmniejszą dla $x\in\mathbf{R}$?

7 listopad 2009

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE

1. Oblicz granice ciągów:
$a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{sin(3^n)+2^n}{3^n}$,
$b)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{(n+(n+n^{1/2})^{1/2})^{1/2}}$,
$c)$ $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{3^n+cos(3^n)}{2^n\cdot n!})$.
2. Oblicz granice funkcji:
$a)$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{lnx}$,
$b)$ $\lim_{x\to 0} \frac{sin(ln(x+1))}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,
$c)$ $\lim_{x\to 1^-} tg(x^3-2x+1)ln(cos(\frac{\pi}{2}x))$,
$d)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(lnx)}{5x^2}$.
3. Zróżniczkować funkcje:
$a)$ x^2e^{tgx},
$b)\frac{\sqrt{1+x}}{x^2-1}$,
$c)$ $ln((x+3)^{1/3}+(x+2)^{1/2})$,
$d)$ $cos(sin(lnx))$.
4. Zbadać przebieg zmienności funkcji (tzn. znaleźć przedziały monotoniczności, wypukłości, naszkicować wykres)
$a)$ $e^x(sinx+1)$,
$b)$ $x^2ln|x|$,
czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą i największą na $\mathbb{R}$?
5. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$(miejsca zerowe, ekstema lokalne, minimum, maksimum, punkty przegięcia, monotoniczność, wypukłość/wklęsłość, naszkicować wykres) na odcinku $[-2, 3]$.
6. Wykazać, że równanie $e^{-x} = -2x + 2$
a) ma co najmniej dwa pierwiastki,
b) ma dokładnie dwa pierwiastki.
7. Czy funkcja $\frac{lnx}{x^2+1}$ osiąga wartość najmniejszą i największą na $\mathbb{R}_+$?

ROZWIĄZANIA
CZĘŚĆ I

1. 0

2. $\frac{1}{\sqrt{6}}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3}-1}{\ln(1+3x)\,\mathrm{tg}(5x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3}-1}{2x^3}\frac{3x}{\ln(1+3x)}\frac{5x^2}{\mathrm{tg}(5x^2)}\frac{2x^3}{3x\,5x^2} = \frac{2}{15}$

4. e

5. 1

6. $\frac{-9}{4}$ (np. użyć regułę de l'Hospitala)

7. (a) zbadać granice $\lim_{x\to\pm\pi/2} \mathrm{tg}(x) - 2x$ i zastosować twierdzenie Darboux
7. (b) wykorzystać fakt, że funkcja $\mathrm{tg}(x) - 2x$ jest wypukła dla $x > 0$ i wklęsła dla $x < 0$

8. Gdyby funkcja $f(x) = ax + b - e^{-x^2}$ zerowała się w czterech różnych punktach, to pochodna $f'(x) = a + 2xe^{-x^2}$ zerowałaby się w trzech różnych punktach. Narysować wykres funkcji $2xe^{-x^2}$ i zobaczyć, że przyjmuje conajwyżej dwa razy tą samą wartość.

9. $\frac{-1+4x+3x^2-4x^3+3x^4-4x^5-x^6}{(1+x^4)^2}$

10. $\frac{1}{x\,ln(x)\,ln(ln(x))}$

11. $-\frac{2e^{-x}(\cos(ln(1+x^2))(1+x+2x^2+x^3)+2x^2\sin(ln(1+x^2)))}{x^3(1+x^2)}$

12. $\cos(x)ln(x)x^{\sin(x)} + \sin(x)x^{\sin(x)-1}$

13. $f(0)$ tylko dla $x = 0$, lokalne max. $x = 1$, lokalne min. $x = 2$, dla $x \in (-\infty, 1)$ i $x \in (2, +\infty)$ rośnie, dla $x \in (1, 2)$ maleje, dla $x < 1.5$ wklęsła, dla $x > 1.5$ wypukła, punkt przegięcia $x = 1.5$. Maksimum na odcinku $[-1, 3]$ wynosi 9 (osiągnięte dla $x = 3$), minimum na odcinku $[-1, 3]$ wynosi -23 (osiągnięte dla $x = -1$)

14. Funkcja osiąga wartość największą i najmniejszą, rośnie dla $x \in (1, -3)$, poza tym odcinkiem maleje, wypukła dla $x \in (-\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} - 2)$.

15. Tak