Egzamin (pierwsze podejście)

Imię:

Nazwisko:

Odpowiedzi na pytania z * należy uzasadniać

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{\pi^n n^4}$

---

2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

---

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}$

---

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$

---

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

---

6) $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x}$

---

7) * $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

Obliczyć pochodne

8) $\left(\frac{\sin(x)}{e^x}\right)'$

---

9) $(tg(\ln(x)))'$

---

10) Wiemy, że funkcja różniczkowalna zeruje się tylko w punktach -2, 0 i 1. W co najmniej ilu punktach pochodna funkcji musi się zerować?

11) * Wiemy, że druga pochodna funkcji (dwukrotnie różniczkowalnej) jest ujemna. W co najwyżej ilu punktach funkcja może się zerować?

---

12) Wiemy, że funkcja różniczkowalna jest wypukła. W co najwyżej ilu punktach pochodna funkcja może się zerować?

---

13) Wielomian trzeciego stopnia ma lokalne minimum równe -1 i lokalne maksimum równe 2 (w pewnych punktach). Ile ma pierwiastków?

---

14) Dany jest wielomian czwartego stopnia postaci $x^4 + ax^3 + cx + d$. Wiemy, że ma w pewnym punkcie lokalne maksimum równe 2 oraz. Ile może mieć pierwiastków?

---

15) * Dana funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -2$. Obliczyć $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

---

16) Podać przykład funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takiej, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

---

17) Podać przykład funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takiej, że $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ nie istnieje.

Część 2

Imie:

Nazwisko:

---

18) Wypisać 4 pierwsze wyrazy rozwinięcia Taylora funkcji w punkcie $x_0 = 0$

---

19) $f(x) = e^{2x}$

---

20) $f(x) = \cos(-x)$

---

21) Dana jest różniczkowalna funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 13$. Czy znamy pochodną kierunkową w kierunku wektora $(2,4)$? Jaśli tak, to ją obliczyć.

---

22) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad} f = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie jest lokalne ekstremum? Jakie?

---

23) * Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad} f = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie jest lokalne ekstremum? Jakie?

24) * Zbiór A w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ opisany jest jednym równaniem $g(x) = 0$. Punkt p należy do A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ na zbiorze A. Czy w p może być ekstremum jeśli: $\operatorname{grad} f(p) = (2, 1, -1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (-4, 2, 2)$?

---

25) * Zbior A w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ opisany jest dwoma równaniami $g(x) = 0$ i $h(x) = 0$. Punkt p należy A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. Czy w p może być ekstremum jeśli: $\operatorname{grad} f(p) = (1, 1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (1, 2, 3, 4)$, $\operatorname{grad} h(p) = (4, 3, 2, 1)$.

---

26) Ciągła funkcja $y(x)$ spełnia równania $\sin(x + y(x)) + \ln(2x - y(x)) = \ln(2\pi)$ oraz $y(\pi) = 0$. Obliczyć $y'(\pi)$.

---

27) * Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

---

28) * Obliczyć pole figury zawartej pomiędzy parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$.

---

29) Sformułować Twierdzenia: Darboux

---

30) Lagrange'a (o wartości średniej)