AAA **Egzamin**

Imię:

Nazwisko:

Odpowiedzi na pytania z ♠ należy uzasadniać

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

---

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n^3}{3^n n^2}$

---

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^5)}{x^5}$

---

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1+3x)}{x}$

---

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$

---

5) Obliczyć pochodną $(\cos(x)\ln(x))'$

---

6) Wiemy, że funkcja różniczkowalna zeruje się tylko w punktach -2, 0 i 1.
W co najmniej ilu punktach pochodna funkcji musi się zerować?

---

7) Wiemy, że druga pochodna funkcji (dwukrotnie różniczkowalnej) jest dodatnia. W co najwyżej ilu punktach funkcja może się zerować?

♠8) Ile ma pierwiastków wielomian $x^{13} + 13x + 1$?

♠9) Dana funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$. Znaleźć $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$.

♠10) Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takiej, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

---

11) O funkcji $f : [0, 10] \to \mathbf{R}$ wiemy, że: $f(2) = f(4) = 0$, $f'(3) = f'(7) = 0$, $f''(5) = 0$. W pozostałych punktach f, f' i f'' nie zerują się. W których punktach wystarczy sprawdzić wartość f, aby znaleźć $\min(f)$ i $\max(f)$?

---

12) Wypisać 6 pierwszych wyrazów (tzn aż do a_5x^5) rozwinięcia Taylora funkcji $f(x) = \cos(2x^2)$ w punkcie $x_0 = 0$.

---

13) Dla $f(x, y) = x^2y$ obliczyć pochoną kierunkową w punkcie $(1, 4)$ w kierunku wektora $(0, 1)$.

---

14) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\mathrm{grad}(f) = 0$ oraz $D^2f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie może być lokalne ekstremum? Jakie?

---

15) Ile jest funkcji ciągłych $y(x)$ dla $x \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ spełniających warunki: $y(0) = \sqrt{2}$ oraz $(x - y(x))(x^2 + y(x)^2 - 2) = 0$.

♠16) Ile jest funkcji ciągłych $y(x)$ dla $x \in (\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ spełniających warunki: $y(1) = 1$ oraz $(x - y(x))(x^2 + y(x)^2 - 2) = 0$.

AAA **Część 2**

Imię:

Nazwisko:

---

17) Zbior A w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ opisany jest dwoma równaniami $g(x) = 0$ i $h(x) = 0$. Punkt p należy do A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. Czy w p może być ekstremum jeśli: $\mathrm{grad}(f)(p) = (1, 0, 0, 1)$, $\mathrm{grad}(g)(p) = (3, 0, 1, 0)$, $\mathrm{grad}(h)(p) = (6, 0, 2, 0)$.

---

18) Czy zbiór A jest zwarty ?

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + 4y^2 = 7\,,\; x + 2y + 3z = 11\,\}$$

♠19) Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x\, \sin(3x)\, dx$

♠20) Obliczyć pole figury zawartej pomiędzy parabolą a prostą $y = x^2$ i $y = 3x - 2$.

21) Sformułować Twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów.

22) Sformułować Twierdzenie Rolle'a

♠23) Ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia następujący warunek:
$\exists\, g \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n \in \mathbf{N}\ \ |x_n - g| < \varepsilon$
(tzn. Istnieje liczba $g \in \mathbf{R}$ taka, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbf{N}$, dla którego $|x_n - g| < \varepsilon$)
Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny?

24) **Zadanie na oddzielnej kartce:**
Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0\,,\ z^2 \leq 4\}\,.$$