Przykładowe pytania testowe na egzamin

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2}$ — $+\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^n}{4^n n^4}$ — *0*

3) $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n+1}$ — e^2

4) $\lim_{n\to+\infty} \left((1+\frac{1}{n})^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ — *0*

5) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ — *1*

6) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$ — *4*

7) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x-1}$ — $+\infty$

8) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x}$ — *0*

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ — *1*

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ — *1*

11) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x}$ — *0*

12) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(x)}{x}$ — *0*

13) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ — *1/2*

14) $\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x}$ — *1*

15) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$ — *ln 2*

16) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{4}+x)-\cos(\frac{\pi}{4})}{x}$ — $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

17) Niech $f(x) = x(\cos(\frac{1}{x})+1)$ dla $x \neq 0$. Określić wartość funkcji w zerze (jeśli się da) tak, aby f była ciągła. — *0*

Obliczyć pochodne

18) $\left(\frac{\ln(x)}{\sin(x)}\right)'$ — $\frac{1}{x\sin(x)} - \frac{\ln(x)\cos(x)}{\sin(x)^2}$

19) $(arctg(e^x))'$ — $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

20) Podać supremum i infimum funkcji x^2-2x+7 na przedziale $[0,2]$. — *sup=7, inf=6*

21) Podać supremum i infimum funkcji $x^3-3x+13$ na przedziale $[0,2]$. — *sup=15, inf=11*

22) Wiemy, że pochodna funkcji różniczkowalnej zeruje się tylko w punktach 1 i 4. W ilu punktach funkcja może się zerować? — *w co najwyżej 3 punktach*

23) Wiemy, że funkcja różniczkowalna zeruje się tylko w punktach 1 i 4. W ilu punktach pochodna funkcji może się zerować? — *w conajmniej jednym punkcie*

24) Wiemy, że funkcja jest wypukła. W ilu punktach funkcja może się zerować? *w 0, 1, 2 punktach lub nieskończenie wielu*

25) Wiemy, że funkcja różniczkowalna jest wypukła. W ilu punktach pochodna funkcja może się zerować? *w żadnym, w jednym punkcie lub nieskończenie wielu*

26) Wielomian trzeciego stopnia ma lokalne minimum równe 2 i lokalne maksimum równe 4 (w pewnych punktach). Ile ma pierwiastków? *jeden*

27) Wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ ma lokalne minimum równe 1 w punkcie $x = 3$ i lokalne maksimum równe 2 w punkcie $x = 5$. Znaleźć $\lim_{x\to+\infty} W(x)$. $-\infty$

28) Dany jest wielomian czwartego stopnia postaci $x^4 + ax^3 + cx + d$. Wiemy, że ma w pewnym punkcie lokalne maksimum równe -5. Ile może mieć pierwiastków? *ma dokładnie dwa*

29) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = c > 0$. Obliczyć $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $+\infty$

30) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Czy musi istnieć i jakie wartości może przyjmować $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. *może przyjmować dowolną wartość lub nie istnieć*

Wypisać 4 pierwsze wyrazy rozwinięcia Taylora funkcji w 0

31) $f(x) = (x + 1)^{10}$ $1 + 10x + 45x^2 + 120x^3$

32) $f(x) = \sin(3x)$ $0 + 3x + 0 - \frac{9}{2}x^3$

33) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $0 + 0 + x^2 + 0$

34) $f(x) = arctg(x)$ $0 + x + 0 - \frac{1}{3}x^3$

35) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to R$. Wiadomo, że $\lim_{x\to0} f(x, 0) = \lim_{y\to0} f(0, y) = f(0, 0)$. Czy wynika z tego, że f jest ciągła w $(0, 0)$? *Nie*

36) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Wiadomo, że f jest ciągła w $(0, 0)$ oraz $f(0, 0) = 13$. Znaleźć $\lim_{t\to0} f(t^2, t^3)$. *13*

37) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}(5, 4) = 7$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(5, 4) = 1$ oraz, że pochodne cząstkowe są ciągłe dla $\|(x, y)\| < 6$. Czy znamy pochodną kierunkową w kierunku wektora $(1, 1)$? *Nie*

38) Dana funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, która jest różniczkowalna w każdym punkcie. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}(7, 1) = 3$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(7, 1) = 2$. Czy znamy pochodną kierunkową w kierunku wektora $(4, 5)$? *tak, =22*

39) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad} f = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie jest lokalne ekstremum? *Tak, minimum*

40) Dana jest funkcja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad} f = 0$ oraz $D^2 f =$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie jest lokalne ekstremum? *Nie*

Zbiór A w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ opisany jest jednym równaniem $g(x) = 0$. Punkt p należy do A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ na zbiorze A. Czy w p może być ekstremum jeśli:

41) $\operatorname{grad} f(p) = (2, 1, -1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (-4, -2, 2)$, *Tak*

42) $\operatorname{grad} f(p) = (0, 0, 0)$, $\operatorname{grad} g(p) = (1, 3, 2)$, *Tak*

43) $\operatorname{grad} f(p) = (1, 3, 2)$, $\operatorname{grad} g(p) = (0, 0, 0)$, *Tak*

44) $\operatorname{grad} f(p) = (2, 1, -1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (-4, 2, 2)$. *Nie*

Zbior A w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ opisany jest dwoma równaniami $g(x) = 0$ i $h(x) = 0$. Punkt p należy A. Szukamy ekstremum funkcji $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ na zbiorze A. Czy w p może być ekstremum jeśli:

45) $\operatorname{grad} f(p) = (2, 1, 2, 1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (4, 2, 2, 0)$, $\operatorname{grad} h(p) = (0, 0, 1, 1)$. *Tak*

46) $\operatorname{grad} f(p) = (0, 0, 0, 0)$, $\operatorname{grad} g(p) = (1, 3, 2, 5)$, $\operatorname{grad} h(p) = (1, 0, 2, 4)$. *Tak*

47) $\operatorname{grad} f(p) = (1, 3, 2, 3)$, $\operatorname{grad} g(p) = (1, 2, 0, 1)$, $\operatorname{grad} h(p) = (2, 4, 0, 2)$. *Tak*

48) $\operatorname{grad} f(p) = (7, 2, 1, 1)$, $\operatorname{grad} g(p) = (4, 2, 2, 1)$, $\operatorname{grad} h(p) = (0, 0, 0, 1)$. *Nie*

49) Ciągła funkcja $y(x)$ spełnia równania $e^{x-y(x)} + (x + y(x))^2 = 5$ oraz $y(1) = 1$. Obliczyć $y'(1)$. *-3/5*

50) Dana jest funkcja $f = f(s, t, u, v) : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$. Obliczyć pochodną cząstkową $\frac{\partial t}{\partial u(s_0, u_0, v_0)}$ funcji uwikłanej $t(s, u, v)$ w punkcie $(s_0, t_0, u_0, v_0) = (1, 4, 2, 3)$ wiedząc, że $\frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0, u_0, v_0) = 5$ $\frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0, u_0, v_0) = 7$, $\frac{\partial f}{\partial u}(s_0, t_0, u_0, v_0) = 12$, $\frac{\partial f}{\partial v}(s_0, t_0, u_0, v_0) = 0$. *-12/7*

51) Funkcja $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jest różniczkowalna. Wiemy, że: $f(1, 2) = (3, 5)$ oraz $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = 5$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = 1$. Czy w otoczeniu punktu $(1, 2)$ funkcja jest odwracalna? Jeśli tak, to obliczyć $D(f^{-1})(3, 5)$. *Tak,* $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

52) Funkcja $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jest różniczkowalna. Wiemy, że: $f(1, 2) = (3, 5)$ oraz $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = 5$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = 10$. Czy w otoczeniu punktu $(1, 2)$ funkcja jest odwracalna? Jeśli tak, to obliczyć $D(f^{-1})(3, 5)$. *Nie*

Obliczyć całki nieoznaczone

53) $\int x \sin(2x) dx$ *(sin(2x) - x cos(2x))/2*

54) $\int x e^{x^2} dx$ $\frac{e^{x^2}}{2}$

55) Obliczyć pole powierzhni figury w $\mathbf{R}^2$ opisanej nierównościami: $\mathbf{3x + y + 2 \leq 0}$, $y \geq x^2$. *1/6*

56) Obliczyć objętość byryły w $\mathbf{R}^3$ opisanej nierównościami: $z \leq 1$, $z \geq x^2 + y^2$. $\frac{\pi}{2}$

Sformułować Twierdzenia:

57) Weierstrassa o przyjmowaniu kresów.

58) Rolla

59) Lagrange'a (o wartości średniej)

60) Schwarza o pochodnych mieszanych

61) Podać definicję różniczkowalności dla funkcji $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$

25 styczeń 2010