Egzamin **TEMAT A**

Imię:

Nazwisko:

Odpowiedzi na pytania z ♠ należy uzasadniać

♠1) Ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia następujący warunek:
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\; \forall n > n_0\;\; |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny? Jeśli nie zawsze, to podać przykład niezbieżnego ciągu ciągu spełniającego ten warunek.

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

---

2) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n!} - \sqrt{\ln(1+n)})$

---

3) $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2n})^n$

♠4) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x^7)\ln(1+x^3)}{x^6 \sin(x^5)}$

5) Podać przykład lub stwierdzić, że nie istnieje funkcja różniczkowalna spełniająca warunek: $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ i $f'(x) < 1$ dla wszystkich punktów x z odcinaka $(1, 3)$.

♠6) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

---

7) Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji $\cos(2x)$ aż do wyrazu $a_{10}x^{10}$.

♠8) Znaleźć $f^{(40)}(0)$ (tzn. czterdziestą pochodną w zerze) funkcji $f(x) = \cos(2x^4)$.

Imię: **TEMAT A**

Nazwisko:

---

9) Dla $f(x,y) = y^2\, 3^{\operatorname{arctg}(x+\ln(x^2+1))}$ obliczyć pochoną kierunkową w punkcie $(0,3)$ w kierunku wektora $(0,1)$.

---

10) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad}(f) = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie może być lokalne ekstremum?

♠11) Dla jakiej liczby naturalnej $n > 0$ funkcja $f(x,y,z) = 2x^2 + xy + 2y^2 + z^n$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0,0,0)$?

---

12) Ile jest funkcji ciągłych $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniających warunki: $y(0) = 0$ oraz $x^2 - y(x)^2 = 0$?

♠13) Czy zbiór $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 10 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0\,\}$ jest zwarty ?

♠14) Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^3\, e^{2x^2}\, dx$

♠15) Czy pole figury $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\ :\ x\geq 2\,,\ y\geq 0,\ x^3y\leq 5\}$ jest skończone? Jeśli jest skończone, to je obliczyć.

Zadania na oddzielnych kartkach:

Zadanie 1: Znaleźć takie liczby a,b,c,d aby $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(2x)-(a+bx+cx^2+dx^3)}{x^3}=0$. Dla znalezionych liczb obliczyć $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(2x)-(a+bx+cx^2+dx^3)}{x^4}$.

Zadanie 2: Zbadać funkcję $f(x)=(x^2+7x+13)e^{x+3}$ (zera, przedziały monotoniczności, wypukłości, lokalne ekstrema, granice w $\pm\infty$ i $\underline{wykres(!)}$).

Zadanie 3: Niech $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$

$$f=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{9}x^3+y^2\,.$$

a) znaleźć lokalne ekstrema funkcji $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$

b) znaleźć maksimum i minimum na kole $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 25\}$.

Egzamin **TEMAT B**

Imię:

Nazwisko:

Odpowiedzi na pytania z ♠ należy uzasadniać

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją

---

1) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n!}-\sqrt{2^n})$

---

2) $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{3n})^n$

♠3) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(7x^6)\sin(x^4)}{x^7\ln(1+x^2)}$

---

4) Podać przykład lub stwierdzić, że nie istnieje funkcja różniczkowalna spełniająca warunek: $f(2)=3$, $f(3)=4$ i $f'(x)>1$ dla wszystkich punktów x z odcinaka $(2,3)$.

♠5) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

6) Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji $\sin(\frac{x}{2})$ aż do wyrazu $a_9 x^9$.

♠7) Znaleźć $f^{(45)}(0)$ (tzn. czterdziestą piątą pochodną w zerze) funkcji $f(x) = \sin(\frac{x^5}{2})$.

♠8) Ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia następujący warunek:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n > n_0\ \ |x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$
tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$
Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny? Jeśli nie zawsze, to podać przykład niezbieżnego ciągu ciągu spełniającego ten warunek.

Imię: **TEMAT B**

Nazwisko:

---

9) Ile jest funkcji ciągłych $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniających warunki: $y(0) = 0$ oraz $y(x)^2 - x^2 = 0$?

♠10) Czy zbiór $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq 6\,,\, 12 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0\,\}$ jest zwarty ?

---

11) Dla $f(x, y) = x^3\, 4^{\operatorname{arctg}(y + \ln(y^2+1))+1}$ obliczyć pochoną kierunkową w punkcie $(2, 0)$ w kierunku wektora $(1, 0)$.

---

12) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad}(f) = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie może być lokalne ekstremum?

♠13) Dla jakiej liczby naturalnej $n > 0$ funkcja $f(x, y, z) = x^n + 3y^2 + yz + 3z^2$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0, 0)$?

♠14) Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^3\, e^{3x^2}\, dx$

♠15) Czy pole figury $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ x \geq 1\,,\ y \geq 0,\ x^4 y \leq 3\}$ jest skończone? Jeśli jest skończone, to je obliczyć.

Zadania na oddzielnych kartkach:

Zadanie 1: Znaleźć takie liczby a, b, c, d aby $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(3x)-(a+bx+cx^2+dx^3)}{x^3} = 0$. Dla znalezionych liczb obliczyć $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(3x)-(a+bx+cx^2+dx^3)}{x^4}$.

Zadanie 2: Zbadać funkcję $f(x) = (x^2+6x+9)e^{x+2}$ (zera, przedziały monotoniczności, wypukłości, lokalne ekstrema, granice w $\pm\infty$ i $\underline{wykres(!)}$).

Zadanie 3: Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + y^2\,.$$

a) znaleźć lokalne ekstrema funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

b) znaleźć maksimum i minimum na kole $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ x^2+y^2 \leq 2\}$.