**Plan wykładu nr 10: Ekstrema warunkowe**

**Szczegóły:**
M. Krych: *skrypt - Ekstrema związane (warunkowe), mnoniki Lagrange'a*
Krysicki-Włodarski: **Tom II**, roz.II (jest tam tylko o funkcjach uwikłanych)

- Twierdzenie o funkcji uwikłanej dla (dwóch zmiennych)
  - ◇ wyprowadzenie wzoru na $y'(x)$ jeśli $g(x, y(x)) = const$;

- Ekstremum warunkowe dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ na zbiorze opisanym równaniem $g(x, y) = const$
  - ◇ Jeśli $(x_0, y_0)$ jest punktem ekstremalnym oraz $grad(g) \neq 0$,
    to $grad(f) = \lambda\, grad(g)$ dla pewnej liczby $\lambda$;

- Interpretacja geometryczna:
  - ◇ $grad(f)$ jest prostopadły do pozimicy funkcji $g$

- Przykłady
  - ◇ $f(x, y) = 2x + y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$
  - ◇ $f(x, y) = x$, $g(x, y) = x^3(x - 1) + y^2 = 0$
    (tu w punkcie (0,0) mamy $grad(g) = (0, 0)$)

- Ekstrema warunkowe w przestrzeni o większym wymiarze:
  - ◇ Więzy są zadane funkcjami $g_i(x_1, x_2, \ldots x_k) = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots \ell$.
  - ◇ Warunek konieczny na istnienie ekstremum przy założeniu, że wektory $grad(g_i)$ są liniowo niezależne:
    **gradient** $grad(f)$ **jest kombinacją liniową wektorów** $grad(g_i)$.

- Przkład:
  - ◇ ekstremum funkcji $f(x, y, z) = x$, na zbiorze zadanym równaniami
    $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

- *Na ćwiczenia: 1-6 z kartki XX-XXI,*