

Kolokwium 2, grupa A

1. Narysować na płaszczyźnie zbiór:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (y^2 - x^2 + 1)(x^2 + 4y^2 - 4) \leq 0\}.$$

Czy ten zbiór jest domknięty, otwarty, zwarty?

2. Dana jest funkcja $f(x, y, z) = x^3 + y^4z + z^7$.

a) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do poziomicy zawierającej punkt $p = (3, 2, 1)$.

b) Znaleźć przecięcie tej płaszczyzny z osią X-ów.

3. Niech $K \subset \mathbf{R}^2$ będzie kwadratem o wierzchołkach $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$. Znaleźć minimum i maksimum funkcji

$$f(x, y) = ((x + 3)^2 + (y + 3)^2)^{1410}$$

na zbiorze K .

4. Znaleźć lokalne ekstrema w \mathbf{R}^3 funkcji

$$f(x, y, z) = 4x^2 - xz + y^4 - 2y^2 + z^2.$$

5. Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x, y, z) = 3x + y + z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 9x^2 + 2y^2 - \frac{1}{3}z^3 = 0, z \leq 1\}.$$

6. Niech $y(x)$ będzie funkcją ciągłą określoną na odcinku zawierającym $x = 2$ taką, że $y(2) = 3$ oraz $x^3 + xy^2 - y^3 + 1 = 0$. Znaleźć $y'(x_0)$.

Punktacja:

1. - 10pt, 2. - 15pt, 3. - 20pt, 4. - 20pt, 5. - 25pt, 6. - 10pt

Kolokwium 2, grupa B

1. Narysować na płaszczyźnie zbiór:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2 - y^2 + 1)(x^2 + 4y^2 - 1) \geq 0\}.$$

Czy ten zbiór jest domknięty, otwarty, zwarty?

2. Dana jest funkcja $f(x, y, z) = x^2z + y^3 + z^6$.

a) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do poziomicy zawierającej punkt $(2, 3, 1)$.

b) Znaleźć przecięcie tej płaszczyzny z osią Y-ków.

3. Niech $K \subset \mathbf{R}^2$ będzie kwadratem o wierzchołkach $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 3)$. Znaleźć minimum i maksimum funkcji

$$f(x, y) = ((x + 4)^2 + (y + 4)^2)^{1931}$$

na zbiorze K .

4. Znaleźć lokalne ekstrema w \mathbf{R}^3 funkcji

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + y^4 - 8y^2 + z^2.$$

5. Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x, y, z) = 2x + y + z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 3y^2 - \frac{1}{3}z^3 = 0, z \leq 1\}.$$

6. Niech $y(x)$ będzie funkcją ciągłą określoną na odcinku zawierającym $x = 2$ taką, że $y(1) = 2$ oraz $x^3 + x + xy + y^3 = 12$. Znaleźć $y'(x_0)$.

Punktacja:

1. - 10pt, 2. - 15pt, 3. - 20pt, 4. - 20pt, 5. - 25pt, 6. - 10pt

Szczegółowa punktacja

Zadanie 1

za narysowanie elipsy 2pt

za narysowanie hiperboli 2pt

za wskazanie wnętrza zbioru 3pt

za udzielenie odpowiedzi na pytania po 1pt

Zadanie 3

Uzasadnienie, że kresy są osiągnięte 2pt

Punkty krytyczne we wnętrzu 6pt

Punkty krytyczne na brzegach 8pt

Wartości w rogach 3pt

Odpowiedz 1pt

Zadanie 5

za uzasadnienie, że max i min istnieje 2pt

za znalezienie punktów krytycznych na powierzchni 9pt (w tym 5 za ułożenie układu równań)

za wskazanie osobliwości zbioru 5pt

za znalezienie punktów krytycznych na brzegu 7pt

za dobrą odpowiedź 2pt