Zadania o pierścieniach

24.1.2020

0.1 ♠ Udowodnić, że jeśli element u jest odwracalny, a n nilpotentny, to $u+n$ jest odwracalny.

0.2 ♠ Udowodnić, że zbiór elementów nilpotentnych jest ideałem.

0.3 ♠ Znaleźć elementy odwracalne w $\mathbb{Z}_4[X]$.

0.4 ♠ Pokazać, że jeżeli $a \in \mathbb{Z}_p^{\wedge}$ nie należy do ideału generowanego przez p, to a jest elementem odwracalnym.

0.5 ♠ Wykazać, że jeżeli R jest dziedziną całkowitości to $R[X]$ także jest dziedziną calkowitości. (Udowodnić także, że pierścień szeregów formalnych $R[[X]]$ jest dziedziną całkowitości.)

0.6 Niech $R = \mathbb{Z}[x]/(x^p - 1)$, gdzie p jest liczbą pierwszą.
a)♠ Czy R ma dzielniki zera?
b)♠ Czy R ma elementy nilpotentne?
c) Jakie elementy są odwracalne w $\mathbb{Q}[x]/(x^p - 1)$?

Uwaga: W $\mathbb{Z}[x]/(x^n-1)$ jedynie dla $n = 1, 2, 3, 4, 6$ elementy odwracalne są postaci $\pm x^k$. W pozostałych przypadkach jest ich dużo więcej, np dla $n = 5$

$$(1 - x + x^2)(x + x^2 - x^4) = x + x^5 - x^6 \equiv 1\,.$$

patrz C. Polcino Milies, S.K. Sehgal - An Introduction to Group Rings-Springer (2002) §8, prop. 8.1.11-12, ex. 8.1.13.

0.7 Pomiędzy którymi pierścieniami istnieją odwzorowania: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_{(q)}$, $\mathbb{Z}[1/p]$, $\mathbb{Z}_[1/q]$, $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$, $\mathbb{Z}_q^{\wedge}$, $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\mathbb{Z}_{q^m}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

0.8 ♠ Czy ideał $(7 + \sqrt{5})$ jest maksymalnym właściwym ideałem w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$? A ideał $(4 + \sqrt{5})$?

0.9 ♠ Wykazać, że $R[x]$ jest DIG wtedy i tylko wtedy gdy R jest ciałem.

0.10 ♠ Wykazać, że następujące ideały są maksymalne:
a) $(2 + i) \lhd \mathbb{Z}[i]$
b) $(3 + \sqrt{2}) \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

0.11 ♠ Dla jakich liczb pierwszych ideał $(p) \lhd \mathbb{Z}[i]$ jest pierwszy?

0.12 ♠ Czy ideał $(x^2 + y^2 - 1, (x + y)^2 - 1)$ jest pierwszy w $\mathbb{R}[x, y]$?

0.13 Czy ideał $(x^2 + y^2 + 10y, x^2 - y) \lhd \mathbb{Q}[x, y]$ można przedstawić jako część wspólną ideałów maksymalnych?

0.14 Oznaczmy przez $\xi \in \mathbb{C}$ pierwiastek pierwotny z 1 stopnia n. Niech generator grupy $\mathbb{Z}_n$ działa na $\mathbb{C}[x, y]$ poprzez działanie na zmiennych $x \mapsto \xi x$, $y \mapsto \xi^{-1} y$. Udowodnić, że zbiór punktów stałych działania $\mathbb{Z}_n$ jest podpierścieniem w $\mathbb{C}[x, y]$. Przedstawić ten pierścien jako iloraz pierścienia wielomianów od 3 zmiennych.

0.15 ♠ Niech $I, J \lhd R$ będą ideałami, oraz $I + J = R$.
a) Niech IJ oznacza podgrupę R rozpiętą przez iloczyny ab, gdzie $a \in I,\ b \in J$. Udowodnić, że zbiór (ideał) IJ jest równy $I \cap J$.
b) Udowodnić, że dla każdej pary $a, b \in R$ istnieje element $x \in R$ taki, że

$$x = a \mod I \qquad \text{oraz} \qquad x = b \mod J\,.$$

Ponadto x jest wyznaczony jednoznacznie mod IJ.
Czy to ma coś wspólnego z tw Chińskim o resztach? Sformułować to twierdzenie w języku ideałów.

1 Euklid, DIG, DJR

1.1 ♠ Dla wybranego $d \in \{-2, 2, 3\}$ udowodnić, że $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $v(a + \sqrt{d}b) = |a^2 - db^2|$ jest pierścieniem euklidesowym (w tym napisie $|x|$ oznacza zwyłą wartość bezwzględną w $\mathbb{Z}$).

1.2 ♠ Udowodnić, że $\mathbb{Z}[\xi]$, gdzie ξ jest pierwiastkiem prymitywnym z 1 stopnia 3, wraz z normą $v(a + b\xi) := a^2 - ab + b^2$ jest pierścieniem euklidesowym.

1.3 ♠ Udowodnić, że $(x^2 - 2) \lhd \mathbb{Q}[x]$ jest ideałem maksymalnym.

1.4 ♠ Niech $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że R jest izomorficzny z $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (produkt pierścieni) jeśli $p \equiv 1 \bmod 6$ lub $\mathbb{F}_{p^2}$ (ciało o p^2 elementach) gdy $p \equiv 5 \bmod 6$.

1.5 ♠ Sprawdzić, że pierścień $\mathbb{Z}_7[X]/(X^3+2)$ jest ciałem. Znaleźć liczbe jego elementów. Korzystajac z algorytmu Euklidesa znaleźć w nim odwrotność elementu wyznaczonego przez wielomian $X + 1$.

1.6 ♠ W pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$ znaleźć $NWD(2 + 11i, 1 + 3i)$. Znaleźć rozkład liczby 15 na czynniki nierozkładalne.

1.7 ♠ a) Pokazać, że w rozkładzie na czynniki pierwsze w $\mathbb{Z}$ liczby naturalnej będącej sumą kwadratów $l = m^2 + n^2$ każdy czynnik postaci $4k - 1$ występuje w potędze parzystej.
b) Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k + 1$ oraz postaci $4k + 3$.

1.8 ♠ Pokazać, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nie istnieje $NWD(4, 2 + 2\sqrt{5})$. Podać przykład elementu nierozkładalnego w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest pierwszy. Podać przykład ideału w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest główny.

1.9 ♠ Udowodnić, że z dokładnością do stowarzyszenia elementami pierwszymi w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ są:

(a) $\sqrt{2}$

(b) liczby pierwsze całkowite postaci $8n \pm 3$

(c) dzielniki $a + b\sqrt{2}$, $b \neq 0$ liczb pierwszych całkowitych postaci $8n \pm 1$.

1.10 ♠ W pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ znaleźć:

(a) $NWD(a + b\sqrt{-2}, a - b\sqrt{-2})$

(b) $NWD(6 + 4\sqrt{-2}, 8 - 2\sqrt{-2})$.

1.11 ♠ Znależć generator idału $I < \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
a) $I = (17, 6 + \sqrt[2]{\ })$
b) $I = (31, 8 + \sqrt[2]{\ })$

2 Zadania o ciałach skończonych

2.1 ♠ Rozłożyć wielomian $x^{16} - x \in \mathbb{F}_2[x]$ na wielomiany nierozkładalne.

2.2 ♠ Jeśli $K_1 \subset K_2$, to $|K_2| = |K_1|^d$.

2.3 ♠ Jeśli K jest ciałem, to $|K| = p^n$ dla pewnej liczby pierwszej.

2.4 ♠ W ciele q-elementowym wielomian $x^q - x$ rozkłada się na różne czynniki liniowe.

2.5 ♠ Grupa multiplikatywna ciała skończonego jest cykliczna.

2.6 ♠ Jeśli $K \supsetneq \mathbb{F}_p$ jest skończonym ciałem, to istnieje element ciała a nie należący do właściwego podciała, tzn $K = \mathbb{F}_p(a)$. (Za a można wziąć generator grupy cyklicznej.)

2.7 ♠ Jeśli $|K_1| = p^m$, $|K_2| = p^n$, $K_1 \subset K_2$, to $m|n$.

2.8 ♠ Jeśli $|K_1| = p^m$, $|K_2| = p^n$ i $m|n$ to isnieje włożenie $K_1 \to K_2$. Jeśli $|K_1| = |K_2| = p^n$ to $K_1 \simeq K_2$.

2.9 ♠ Jeśli K_1 i K_2 są podciałami ciała L i $|K_2| = |K_1|^d$, to $K_1 \subset K_2$. Jeśli K_1 i K_2 są równolicznymi podciałami ciała L to $K_1 = K_2$.

O automorfizmach ciał skończonych

2.10 ♠ Niech K ma p^n elementów. Przekształcenie $a \mapsto a^p$ jest homomorfizmem $K \to K$ (oznaczane ϕ od Frobeniusa).

2.11 ♠ Niech K ma p^n elementów. Zbiór rozwiązań równania $x^{p^k} - x$ jest podciałem K. Jeśli wielomian $x^{p^k} - x$ rozkłada się na czynniki liniowe w K, to k dzieli n. Wywnioskować, że dla każdego k istnieje ciało o p^k elementach.

2.12 ♠ Wszystkie podciała w K są postaci $K^{\phi^k} = \{a \in K \mid \phi^k(a) = a\}$. Niech $|\mathbb{F}_p(a)| = p^n$. Wykazać

$$\phi^k(a) = a \iff n|k.$$

2.13 Niech K ma p^n elementów i $n = st$, gdzie s i t są względnie pierwsze. Dane elementy $a, b \in K$ takie, że $|\mathbb{F}_p(a)| = p^s$ i $|\mathbb{F}_p(b)| = p^t$. Wtedy $\mathbb{F}_p(a + b) = K$. (Zbadać własności wielomianu $f_k(x) = \phi^k(x) - x$.)
Wskazówka: obliczyć wymiary $dim_{\mathbb{F}_p}(K)$, gdzie $K \in \{\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(a), \mathbb{F}_p(b), \mathbb{F}_p(a, b)\}$ i udowodnić, że $\mathbb{F}_p(a) \subset \mathbb{F}_p(a + b)$.

2.14 ♠ Niech K ma p^n elementów. Rozłóżmy wielomian $x^{p^n} - x$ na nierozkładalne czynniki w $\mathbb{F}_p[x]$. Każdy element K jest pierwiastkiem dokładnie jednego czynnika. Jeśli $\mathbb{F}_p(a) = K$, to czynnik, którego a jest pierwiastkiem ma stopień n.

2.15 ♠ Niech K ma p^n elementów. Rozłóżmy wielomian $x^{p^n} - x$ na nierozkładalne czynniki w $\mathbb{F}_p[x]$. Jeden z czynników jest stopnia n i nie ma czynników wyższego stopnia.

2.16 ♠ Niech n_i będzie ciągiem liczb naturalnych takich, że $n_i | n_{i+1}$ oraz $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists i \in \mathbb{N}\ n | n_i$. Niech K_i będzie ciałem o p^{n_i} elementach. Ustalmy włożenia $K_i \hookrightarrow K_{i+1}$. Niech $K = \bigcup K_i$. Udowodnić, że K jest algebraicznie domknięte.

2.17 Opisać grupę automorfizmów domknięcia algebraicznego $\mathbb{F}_p$.
Wskazówka: Wykazać, że każdy automorfizm ciała skończonego jest potęgą automorfizmu Frobeniusa $x \mapsto x^p$.

3 Inne

3.1 ♠ Czy $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2+2)$ jest ciałem ? Znaleźć ideały maksymalne pierścienia $\mathbb{Z}_5[X]/(X^3+3X^2+2X+1)$.

3.2 ♠ Niech $K = (\mathbb{F}_p[x^p]) \subset L = (\mathbb{F}_p[x])$ będą ciałami funkcji wymiernych. Czy istnieje wielomian $f \in K[y]$, którego pierwiastkiem jednokrotnym w L jest x?

3.3 Czy ideał $(x^2+y^2+z^2-1, 4x^2+9y^2-1)$ jest pierwszy w $\mathbb{R}[x,y,z]$?

3.4 Czy jest prawdą, że: Pierścień R zawiera dokładnie jeden ideał pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego element nieodwracalny jest nilpotentny.

3.5 Czy jest prawdą, że: każdy element pierścienia jest odwracalny lub nilpotentny lub podzielny przez element pierwszy.

3.6 Ideał Jacobsona definiujemy jako

$$J = \bigcap_{\substack{I < R \\ \text{maksymalny}}} I\,.$$

Wykazać, że $x \in J \Leftrightarrow \forall y \in R\ \ (1-xy)$ jest odwracalny.

3.7 ♠ Wykazać, że $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n \in I\}$ jest ideałem.

3.8 ♠ Opisać grupę automorfizmów ciała $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, tzn grupę Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q})$.

4 Zadania na po–świętach

4.1 ♠ Opisać grupę automorfizmów ciała $\mathbb{F}_{p^n}$

4.2 ♠ Niech p będzie liczbą pierwszą.
a) Udowodnić, że $\mathbb{Z}_p^{\wedge}[x]/(px-1)$ jest ciałem.
b) Czy wielomian $x^{p-1}-1$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$?
c) Czy w $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$ są pierwiastki z 1 stopnia p?

4.3 ♠ Korzystając z kryterium Eisensteina udowodnić, że

$$f(X,Y) = X^4 + 2Y^2X^3 + 3Y^3X^2 + 4YX + 5Y + 6Y^2$$

jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}[X,Y]$.

4.4 ♠ Sprawdzić nierozkładalność wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$:
a) $x^4+x^3+x^2+x+1$
b) x^3-7x^2+3x+3
c) $63x^3+21x^2+84$
d) $90x^3+135x+315$

4.5 ♠ Niech $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Znaleźć wielomian minimalny $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{K}$ na $\mathbb{Q}$. Zbadać grupę automorfizmów $G(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) = Aut(\mathbb{K})$.

4.6 ♠ Opisać grupę automorfizmów ciała $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi)$, gdzie ξ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 + x + 1$. Opisać podciała $K \subset L$ i odpowiadające im podgrupy $G(L/K) \subset G(L/\mathbb{Q})$.

4.7 ♠ Pokazać, że dla pierścienia R następujące warunki są równoważne:
a) suma elementów nieodwracalnych jest elementem nieodwracalnym,
b) zbiór elementów nieodwracalnych jest ideałem,
c) w R istnieje dokladnie jeden ideał maksymalny.
Pierścien, jak wyżej nazywa sie lokalnym.

4.8 ♠ Udowodnić, że jeżeli $I \subset R$ jest ideałem pierwszym, zaś $S = R - I$ to pierścien $S^{-1}R$ jest lokalny.

4.9 ♠ Udowodnić, że $K[[X]]$ jest pierścieniem lokalnym, gdzie K jest ciałem.

Zadania „łatwe" o pierściemniach są w pliku
`https://www.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/algebra2019/algebra2019latwe.pdf`
Przykładowe kolokwium o pierścieniach:
`https://www.mimuw.edu.pl/%7Eweber/zadania/algebra2014/kolok2.pdf`

5

5.1 ♠ Załóżmy, że jeżeli R jest pierścieniem Noetherowskim. Czy pierścień szeregów formalnych $R[[X]]$ jest także noetherowski?

5.2 ♠ Udowodnić, że jeśli $I \subset R$ jest ideałem przymarnym, to radykał $\sqrt{I}$ jest pierwszy. Poadać przykład, że odwrotne wynikanie nie zachodzi.

5.3 ♠ Znaleźć rozkład prymarny ideału $\langle x^2 + y^2 - 2y, x^2 - y \rangle \subset k[x, y]$.

5.4 ♠ Znaleźć conajmniej dwa rozkłady prymarne idału $\langle x^2, xy, xz \rangle \subset k[x, y, z]$. Obliczyć radykały czynników.

5.5 ♠ **Spektrum pierścienia** Niech R będzie pierścieniem i niech $Spec\, R$ oznacza zbiór ideałów pierwszych R. Dla dowolnego podzbioru $E \subset R$ niech $V(E)$ oznacza zbiór ideałów pierwszych zawierających E. Dla $a \in R$ oznaczamy $V(a) = V(\{a\})$. Sprawdzić, że: rodzina $\{V(E)\}_{E \subset R}$ spełnia aksjomaty rodziny podzbiorów domkniętych dla pewnej topologii na $Spec\, R$. Topologię tę nazywamy topologią Zariskiego.
Uwaga: w tej topologii punkty nie muszą by domknięte.

5.6 ♠ Udowodnić, że domknięcie dowolnego punktu $P \in Spec\, R$ w topologii Zariskiego to zbiór ideałów zawierających P. Ideały maksymalne są domkniętymi punktami.

5.7 ♠ Dany homomorfizm pierścieni $f : R \longrightarrow R'$. Wykazać, że branie przeciwobrazu ideału definiuje odwzorowanie ciągłe $f^* : Spec\, R' \longrightarrow Spec\, R$. Opisać odwzorowanie ciągłe $Spec\, \mathbb{C}[x] \to Spec\, \mathbb{R}[x]$ indukowane przez $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

5.8 ♠ Przypuśćmy, że R zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny $\mathfrak{m}$ oraz $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k = 0$.
– Mówimy, że ciąg elementów pierścienia spełnia warunek Cauchy'ego jeśli

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n > n_0\ a_n - a_m \in \mathfrak{m}^r$$

– Mówimy, że ciąg elementów pierścienia jest zbieżny, jeśli istnieje $b \in R$ takie, że

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ a_n - b \in \mathfrak{m}^r$$

Załóżmy że w R jest spełnione: *każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.*
Udowodnić Lemat Hensela: Niech $f = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in R[x]$. Przypuśćmy, że $f_0 = f \mod \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}[x]$ rozkłada się na wielomiany $f_0 = (x - \bar{a})\bar{g}$ takie, że $\bar{g}(\bar{a}) \neq 0$. Wtedy istnieją wielomian $g \in R[x]$ i $a \in R$, takie, że $f = (x-a)g$ oraz $\bar{a} = a \mod \mathfrak{m}$ i $\bar{g} = g \mod \mathfrak{m}$.

(Mocniejsza wersja: patrz Eisenbud Th. 7.18.)

5.9 Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą Hausdorffa i niech $C(X)$ będzie pierścieniem rzeczywistych funkcji ciągłych na X.

a) pokazać, że dla każdego punktu $x \in X$ ideał $I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ jest maksymalny.

b) (Gelfand) Udowodnić, że przekształcenie $\Phi : X \longrightarrow SpecMax\,(C(X))$, gdzie $\Phi(x) = I_x$ jest homeomorfizmem.

5.10 Niech X będzie przestrzenią topologiczną $x \in X$. Niech R będzie pierścieniem kiełków rzeczywistych funkcji ciągłych w x (elementy tego pierścienia są reprezentowane przez pary (U, f) gdzie U jest otoczeniem x, $f : U \to \mathbb{R}$)). Przy jakich załżeniach o X pierścień R jest lokalny?

5.11 Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:

a) $Spec\,R$ jest niespójne

b) $R \cong R_1 \times R_2$, gdzie R_1 i R_2 są pierścieniami niezerowymi.

c) R zawiera element $r \in R$, taki że $r^2 = r$, $r \neq 0$ i $r \neq 1$.

5.12 Niech $S \subset R$ będzie systemem multyplikatywnym w R, zaś $\iota : R \longrightarrow S^{-1}R$ homomorfizmem lokalizacji.

a) $\iota^* : Spec\,S^{-1}R \longrightarrow Spec\,R$ jest zanurzeniem homeomorficznym

b) jeżeli $S = \{1, a, a^2, ..\}$ to $\iota^*(Spec\,R_S) = U_a$

c) jeżeli $S = R \setminus I$, gdzie I jest ideałem pierwszym, to $\iota^*(Spec\,R_S) = \bigcap_{I \in U} U$, gdzie U jest otwartym otoczeniem I w $Spec\,R$.

5.13 Dana rodzina zbiorów $E_i \subset R$, $i \in I$. Załóżmy, że $\bigcup_{i \in I} U_i = SpecR$, gdzie $U_i = \{\mathfrak{p} \mid E_i \not\subset \mathfrak{p}\}$. Niech S_i będzie systemem multiplikatywnym generowanym przez S_i. Wykazać, że (omawiany na ćwiczeniach) ciąg

$$0 \to R \overset{\phi}{\to} \prod_{i \in I} S_i^{-1}R \overset{\psi}{\to} \prod_{i<j} S_i^{-1}S_j^{-1}R$$

jest dokładny, tzn ϕ jest mono, $im(\phi) = ker(\psi)$.

5.14 Gdyby powyższe zadanie sprawiało trudności, proszę założyć, że $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, zbiory E_i to układy równań wielomianowych, U_i to dopełnienie zbioru opisanego przez wielomiany ze zbioru E_i. Można założyć, że $|I| = 2$.

Zadanie sprowadza się do następującego stwierdzenia: Załóżmy, że $(f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_\ell) = (1)$. Niech

$$F \in R[f_1^{-1}, f_2^{-1}, \ldots, f_k^{-1}], \qquad G \in R[g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_\ell^{-1}]$$

oraz $F = G$ w pierścieniu $R[f_1^{-1}, f_2^{-1}, \ldots, f_k^{-1}, g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_\ell^{-1}]$, wtedy F oraz G są obrazami pewnego elementu z R:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\Delta} & R[f_1^{-1}, \ldots, f_k^{-1}] \oplus R[g_1^{-1}, \ldots, g_\ell^{-1}] & \longrightarrow & R[f_1^{-1}, \ldots, f_k^{-1}, g_1^{-1}, \ldots, g_\ell^{-1}] \\ & & ? & \mapsto & (F, G) & \mapsto & F - G = 0 \end{array}$$

5.15 Niech k będzie ciałem, $L = k(a, b)$, Wykazać, że elementy a^3, b^3 i $a^2 + b^2 - 1$ są algebraicznie zależne.

5.16 Udowodnić twierdzenie Lürotha: Niech $L = k(x)$ oraz $M \subset L$ jest podciałem. Wykazać, że w M istnieje element y, taki, że $M = k(y)$.