Zadania o grupach 2019

4.12.2019

Zadania zawierają odsyłacze do podręczników

[BT] A. Bojanowska, P. Traczyk, Algebra I (skrypt) http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaboj/algebra/algfinv1.pdf

[Br] J. Browkin, Teoria ciał, Bibl.Mat.49, PWN, Warszawa 1977

[KM] M. Kargapolov, J. Merzljakov, Podstawy teorii grup, PWN, Warszawa 1976.

[BJ] M. Bryński, J. Jurkiewicz, Zbiór zadań z algebry, PWN, Warszawa

Zadania zrobione oznaczone są przez ♠.

1 Przykłady

1.1 Uzasadnić, że grupa permutacji parzystych A_5 jest izomorficzna z grupą izometrii zachowujących orientację dwudziestościanu foremnego I_{60}.

1.2 ♠ Czy istnieje skończony układ generatorów grupy addytywnej ciała liczb wymiernych

$$\mathbb{Q}_+ := (\mathbb{Q}, +, 0)\ ?$$

1.3 ♠ Wykazać, że grupa wolna o 2 generatorach $F(\{a,b\})$ zawiera pod grupę, która nie jest generowana przez żaden skończony zbiór elementów.

1.4 ♠ Sprawdzić, że $SL_2(\mathbb{Z})$ jest generowana przez macierze $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 ♠ Znaleźć $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$, $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$, gdzie $\mathbb{F}_q$ jest ciałem q-elementowym.

1.6 ♠ Centrum grupy definiujemy jako $Z(G) = \{g \in G\ :\ \forall h \in G\ gh = hg\}$. Znaleźć $Z(GL_n(\mathbb{F}))$ i $Z(SL_n(\mathbb{F}))$, gdzie $\mathbb{F}$ jest ciałem.

1.7 Wskazać rozkład grupy izometrii kwadratu D_8 na sumę teoriomnogościową swoich trzech podgrup właściwych. Uzasadnić, że żadna grupa nie jest sumą dwóch swoich podgrup właściwych.

1.8 Niech G_1 i G_2 będą podgrupami pewnej ustalonej grupy. Udowodnić $|G_1 \cdot G_2| \cdot |G_1 \cap G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$. Uwaga: zbiór $G_1 \cdot G_2 = \{g_1 g_2\ :\ g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$ nie musi być grupą.

1.9 ♠ Opisać znane grupy rzędu 8.

Następne dwa zadania to przykłady grup Coxetera, będziemy je robić w drugiej kolejności

1.10 Niech $G \subset GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ będzie podgrupą generowaną przez permutacje współrzędnych i macierze diagonalne $Diag(t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_n})$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Wykazać, że istnieje układ generatorów $s_0, s_1, \dots s_{n-1}$, spełniający

$s_i^2 = 1$,

$s_i s_j = s_j s_i$ dla $i - j \not\equiv \pm 1\ mod\ n$,

$(s_i s_{i+1})^3 = 1$ ($i+1$ rozumiane modulo n).

1.11 Niech $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$ będzie podgrupą generowaną przez permutacje współrzędnych i macierze diagonalne $D = Diag(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, $det(D) = 1$. Wykazać, że istnieje układ generatorów
$s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s'_{n-1}$, spełniający
$s_i^2 = 1$, ${s'}_{n-1}^2 = 1$
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $|i - j| \neq 1$,
$s_i s'_{n-1} = s'_{n-1} s_i$ dla $i \neq n-2$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$, $(s_{n-2} s'_{n-1})^3 = 1$

1.12 ♠ Wykazać, że 3-cykle generują grupę permutacji parzystych A_n.

1.13 ♠ Opisać kategoryjny produkt i sumę prostą w kategorii grup. Koproduktem (kategoryjną sumą prostą) grup G_1 i G_2 jest grupa G wraz z homomorfizmami $i_1 : G_1 \to G$, $i_2 : G_2 \to G$

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\phi"] & \\
G_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "\forall f_1"'] & & G_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "\forall f_2"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

spełniająca własność: dla każdej pary homomorfizmów $f_1 : G_1 \to H$, $f_2 : G_2 \to H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : G \to H$ taki, że $\phi \circ i_k = f_k$ dla $k = 1, 2$. Czy w poprzednich zadaniach już pojawił się już koprodukt grup dla $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$?

2 Homomorfizmy, warstwy, ilorazy

2.1 ♠ Niech $|G| < \infty$. Wykazać, że ilość elementów rzędu pierwszego p jest podzielna przez $p - 1$.

2.2 Niech $(G, +, 0)$ będzie grupą przemienną. Mówimy, że G jest podzielna, jeśli

$$\forall g \in G \; \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \; \exists h \in G \; nh = g.$$

(Przykład: $G = (\mathbb{Q}, +, 0)$.) Wykazać, że grupa podzienlna nie ma właściwych podgrup skończonego indeksu.

2.3 a) Niech $G \subset \mathbb{Q}$ będzie zbiorem ułamków, które w postaci nieskracalnej mają mianowniki będące potęgą liczby p. (Oznaczenie $\mathbb{Z}[1/p]$.) Czy $\mathbb{Z}[1/p]$ ma podgrupę skończonego indeksu?
b) Niech $G \subset \mathbb{Q}$ będzie zbiorem ułamków, które w postaci nieskracalnej mają mianowniki względnie pierwsze z liczbą p. (Oznaczenie $\mathbb{Z}_{(p)}$.) Czy $\mathbb{Z}_{(p)}$ ma podgrupę skończonego indeksu?

2.4 ♠ Wykazać, że istnieje epimorfizm $GL_2(\mathbb{Z}_3) \to \Sigma_4$ z jądrem $\{I, -I\}$.

2.5 ♠ Znaleźć epimorfizm $\Sigma_4 \to \Sigma_3$.

2.6 Opisać grupy $Aut(\mathbb{Z}_n)$ dla $n = 13,\ 15,\ 16,\ 20,\ 21,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30$. Przedstawić je jako produkty grup cyklicznych. (Wskazówka: jeśli $(m, n) = 1$ to $Aut(\mathbb{Z}_{mn}) \simeq Aut(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \simeq Aut(\mathbb{Z}_m) \times Aut(\mathbb{Z}_n)$.)

2.7 ♠ Czy istnieje grupa cykliczna G taka, że $Aut(G) \simeq \mathbb{Z}_8$?

2.8 ♠ Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $Aut(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_{p-1}$.

2.9 Każda podgrupa indeksu 2 jest podgrupą normalną.

2.10 ♠ Udowodnić, że centrum $Z(G)$ jest podgrupą normalną w G. Wykazać, że jeśli G nieprzemienna, to $G/Z(G)$ nie jest grupą cykliczną.

3 Grupy permutacji itp

3.1 ♠ Grupa automorfizmów grupy nieprzemiennej nie jest cykliczna. (Wsk: z poprzedniego zadania.)

3.2 ♠ Niech p będzie liczbą pierwszą. $|G| = p^k$, $\{1\} \neq N \lhd G$ to $N \cap Z(G) \neq \{1\}$

3.3 ♠ Niech $Inn(G) < Aut(G)$ oznacza grupę automorfizmów wewnętrznych grupy G (tzn postaci $h \mapsto ghg^{-1}$). Wykazać, że $Inn(G)$ jest podgrupą normalną. Niech $Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$. Znaleźć $Out(D_{2n})$.

3.4 ♠ Udowodnić wzór Burnsida

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^{\langle g\rangle}|.$$

3.5 ♠ Niech p liczba pierwsza. Pokazać, że Σ_p jest generowana przez dowolny cykl długości p i dowolną transpozycję.

3.6 ♠ Opisać klasy sprzężoności elementów w Σ_5 i w A_5.

3.7 ♠ a) Wskazać podgrupę rzędu 5^6 w Σ_{25}. b) Niech p będzie liczbą pierwszą, $n \in \mathbb{N}$. Wskazać p-podgrupę Sylowa w Σ_n.

3.8 ♠ Czy $Inn(\Sigma_n) = Aut(\Sigma_n)$ dla $n = 2, 3, 4, 5$? Uwaga: wyjątkowo $Inn(\Sigma_6) \neq Aut(\Sigma_6)$.

Patrz np Wiki: Automorphisms of the symmetric and alternating groups.

3.9 ♠ a) Wskazać dwie nieizomorficzne nieprzemienne grupy rzędu 125. b) Czy istnieje jeszcze trzecia grupa nieprzemienna, która jest nieizomorficzna ze wskazanymi w punkcie a)?

3.10 ♠ Niech G będzie skończoną grupą abelową, która nie jest cykliczna. Wykazać, że istnieje $d < |G|$ takie, że dla każdego $g \in G$ mamy $g^d = 1$.

4 Grupy Sylowa

4.1 ♠ Niech H będzie grupą prostą (tzn H nie zawiera właściwej nietrywialnej podgrupy normalnej). $H \lhd G$, $|H|^2$ nie dzieli $|G|$. Udowodnić, że H jest jedyną izomorficzną z H podgrupą G.

4.2 ♠ Niech $n = 2^k m$, $2 \not| m$. Ile jest podgrup rzędu 2^{k+1} w D_{2n}?

4.3 ♠ Czy istnieje grupa zawierająca dokładnie 12 elementów rzędu 5.

4.4 ♠ Czy każda grupa rzędu 595 jest cykliczna?

4.5 ♠ Dla jakiego n istnieje grupa prosta rzędu $3^n \cdot 7$?

4.6 ♠ Jeśli $|G| = pqr$ (p, q i r liczby pierwsze), pokazać, że G zawiera nietrywialną podgrupę normalną.

4.7 ♠ Wykazać, że A_n jest prosta dla $n > 4$.

5

5.1 ♠ Niech G będzie grupą, zaś p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym $|G|$. Podgrupa H jest taka, że $|G|/|H| = p$. Pokaż, że H jest normalna.

5.2 ♠ Niech K będzie podgrupą normalną grupy G i $|G/K| = n < \infty$. Pokazać, że
(a) dla każdego $g \in G$ mamy $g^n \in K$,
(b) jeśli $g \in G$, $g^m \in K$ oraz $(m, n) = 1$, to $g \in K$.

5.3 ♠ Niech G będzie grupą skończoną. Udowodnić, że jeżeli G jest grupą nieabelową, to $Aut(G)$ nie jest grupą cykliczną. Udowodnić, że nie istnieje grupa G taka, że grupa $Aut(G)$ jest cykliczna rzędu nieparzystego różnego od 1.

5.4 ♠ Niech A, B, C będą grupami abelowymi oraz $\phi : B \to C$ epimorfizmem. Składanie z ϕ indukuje przekształcenie $\phi_* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$. Udowodnić, że jeśli A jest skończenie generowana i beztorsyjna, to ϕ_* jest epimorfizmem. Podać przykład grupy abelowej beztorsyjnej A takiej, że ϕ_* nie jest epimorfizmem.

5.5 ♠ Wskazać grupę G wraz z podgypą normalną H taką, że nie istnieje podgrupa normalna K o własności:
1) $K \simeq G/H$,
2) $G/K \simeq H$.
Podać taki przykład, by H i G/H były proste.

5.6 ♠ Niech $\Lambda = \langle (4, 4, 8), (2, 4, 5), (4, 6, 9) \rangle \subset \mathbb{Z}^3$. Przedstawić grupę $\mathbb{Z}^3/\Lambda$ jako produk grup cyklicznych.

5.7 ♠ Dana grupa abelowa $A = \mathbb{Z}^n/im(\phi)$, gdzie $\phi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ jest zadane wzorem

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i, \sum_{i=1}^{m} i\, a_i, \sum_{i=1}^{m} i^2 a_i, \ldots \sum_{i=1}^{m} i^{n-1} a_i \right) .$$

Przedstawić A w postaci produktu grup cyklicznych.

6

6.1 ♠ Znaleźć wzrost grupy Heisenberga (tzn grupy macierzy górnotrójkątnych 3×3 z całkowitoliczbowych z jedynkami na przekątnej).

6.2 ♠ Niech $\iota : GrAb \to Gr$ będzie zanurzeniem kategorii grup abelowych do kategorii wszystkich grup. Znaleźć przekształcenie (funktor) $\phi : Gr \to GrAb$ i naturalną bijekcję $\mathrm{Hom}_{Gr}(G, \iota A) \simeq \mathrm{Hom}(\phi(G), A)$.

6.3 Czy $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Z}[1/p]$? Czy $\mathbb{Z}[1/q] \simeq \mathbb{Z}[1/p]$ ($p \neq q$ liczby pierwsze)? Czy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$? Czy $\mathbb{Z}[1/p] \times \mathbb{Z}[1/p] \simeq \mathbb{Z}[1/p]$? (Chodzi o izomorfizmy grup abelowych.)

6.4 Wykazać, że podgrupa i iloraz grupy nilpotentnej jest grupą nilpotentną.

6.5 Udowodnić, że grupa nilpotentna ma wzrost wielomianowy. (Wsk. Znając wzrost $[G, G]$ oszacować wzrost G.)

6.6 Wykazać, że każda grupa skończenie generowana ma wzrost conajwyżej wykładniczy.

6.7 $SL_2(\mathbb{Z})$ ma wzrost wykładniczy.

6.8 Czy istnieje nietrywialna grupa G generowana przez elementy a, b, c, które spełniają relacje

$$[a, b] = b, \qquad [b, c] = c, \qquad [c, a] = a\,?$$

6.9 Udowodnić, że grupa permutacji Σ_n ma następujące przedstawienie
generatory: transpozycje $s_i = (i, i + 1)$ dla $i = 1, s, \ldots, n - 1$
relacje:
$s_i^2 = 1$,
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $|i - j| \neq 1$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$

6.10 Niech $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$ będzie podgrupą generowaną przez permutacje współrzędnych i macierze diagonalne $D = Diag(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, $det(D) = 1$. Wykazać, że istnieje układ generatorów $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s'_{n-1}$, spełniający
$s_i^2 = 1$, $s'^2_{n-1} = 1$
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $|i - j| \neq 1$,
$s_i s'_{n-1} = s'_{n-1} s_i$ dla $i \neq n - 2$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$, $(s_{n-2} s'_{n-1})^3 = 1$

7 Zadania o pierścieniach

https://www.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/algebra2019/pierscienie2019zad.pdf