(tylko) Konspekt wykładu Algebra I* 2019

http://duch.mimuw.edu.pl/%7Eaweber

v.13.11.2019

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników

[BB] A. Białynicki-Birula, Zarys algebry, Bibl.Mat. 63, PWN, Warszawa 1987

[BT] A. Bojanowska, P. Traczyk, Algebra I (skrypt)

http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaboj/algebra/algfinv1.pdf, http://dydmat.mimuw.edu.pl/algebra-i

[Br] J. Browkin, Teoria ciał, Bibl.Mat.49, PWN, Warszawa 1977

[KM] M. Kargapolov, J. Merzljakov, Podstawy teorii grup, PWN, Warszawa 1976.

1 Grupy

[Br], [BT], [KM]

1.1 Aksjomaty grupy $(G, \cdot, e)$:

- (łączność) $\forall a, b, c \in G \ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (własność elementu neutralnego) $\forall a \in G \ \ (a \cdot e) = e \cdot a = a$,
- (istnienie elementu odwrotnego) $\forall a \in G \ \exists a' \in G \ \ a \cdot a' = a' \cdot a = e$

Dowodzimy jednoznaczność jedynki, jednoznaczność elementu odwrotnego. Element odwrotny jest oznaczany przez a^{-1}. Element neutralny często oznaczany jest przez 1.

1.2 Ćwiczenie: jesli w grupie $ab = 1$ to $ba = 1$.

1.3 Zbiór $H \subset G$ jest pod grupą gdy:

- $H \neq \emptyset$,
- $a, b \in H \ \Rightarrow \ ab \in H$
- $a \in H \ \Rightarrow \ a^{-1} \in H$

1.4 Przykłady:

- Liczb całkowite $\mathbb{Z}$,
- Grupa addytywna ciała $(\mathbb{K}, +, 0)$.
- Grupa multiplikatywna $\mathbb{K}^* = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem.
- Grupa cykliczna $\mathbb{Z}_n = (\{0, 1, 2, \dots, n-1\}, +_{\text{mod } n}, 0)$ jest izomorficzna z grupą pierwiastków z jedynki stopnia n

$$\mathbb{Z}_n \simeq \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

z działaniem mnożenia.

- grupy permutacji $S_n = \Sigma_n$, grupa permutacji parzystych A_n
- grupy liniowe $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, macierze odwracalne górnotrójkątne, macierze odwracalne górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej
- Grupa $SL_n(\mathbb{Z}) \subset SL_n(\mathbb{R})$ składająca się z macierzy o calkowitoliczbowych wyrazach.
- Grupa wolna $F(A)$, gdzie A jest dowolnym zbiorem, np $F(\{a, b\})$ grupa wolna o dwóch generatorach.

1.5 Grupy przekształceń: automorfizmy zbioru zachowujące jakąś strukturę np. izometrie $\mathbb{R}^n$, izometrie $\mathbb{R}^2$ zachowujące dany n-kąt formeny (grupy dihedralne D_{2n}), izometrie $\mathbb{R}^3$ zachowujące daną bryłę platońską.

1.6 Grupy dihedralne izometrii n-kąta formenego D_{2n}. Jest generowana przez deie symetrie s_1, s_2 względem osi przecinającymi się pod kątem π/n. Złożenie $R = s_2 s_1$ jest obrotem o kąt $2\pi/n$, zatem $R^n = (s_2 s_1)^n = id$. Grupę dihedralną można przedstawić za pomocą generatorów i relacji definiujących

$$D_{2n} = \langle s, R \mid s^2 = 1,\ sRs = R^{-1} \rangle \,.$$

1.7 Grupa izometrii ośmiościanu/sześcianu zachowujących orientację ma 24 elementy i jest izomorficzna z grupą Σ_4. (Izometrie permutują przekątne.)

1.8 Zadanie: Grupa izometrii 20-ścianu/12-ścianu zachowujących orientację ma 60 elementów i jest izomorficzna z grupą A_5.

1.9 Grupa warkoczy, relacja warkoczowa $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

2 Warstwy, Twierdzenie Lagrange'a, homomorfizmy, grupa ilorazowa

Patrz [Browkin roz.1 §1.1-1.5]

2.1 Grupa cykliczna, rząd elementu, rząd grupy.

2.2 Przecięcie podgrup jest podgrupą

2.3 Podgrupa generowana przez zbiór A to najmniejsza grupa zawierająca A

2.4 Warstwy grupy względem podgrupy H: lewostronne G/H, i prawostronne $H\backslash G$

2.5 Indeks podgrupy, tw Lagrangea $|G| = (G : H) \cdot |H|$

2.6 Tw Lagrangea: rząd elementu dzieli rząd grupy

2.7 Twierdzenie Lagrange'a i zastosowania: każda grupa rzędu pierwszego jest cykliczna,

2.8 Homomorfizm grup, obraz, jądro homomorfizmu

2.9 Podgrupa normalna, równość warstw prawostronnych i lewostronnych

2.10 Automorfizm wewnętrzny: $\phi_g : G \to G$, $\phi_g(h) = ghg^{-1}$.

2.11 Podgrupa $N < G$ jest normalna gdy dla każdego $g \in G$ mamy $gNg^{-1} = N$.

2.12 Jądro jest podgrupą normalną

2.13 Twierdzenie o izomorfizmie: $G/ker(f) \simeq im(f)$.

2.14 Przykłady ilorazów:
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$
$\Sigma_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$
$A_4/K \simeq \mathbb{Z}_3$
Gdy $n = 2m$ to $\{id, -id\} < D_{2n}$. Opisać $D_{2n}/\{id, -id\}$.

3 Działania

3.1 Homomorfizm $\phi : G \to H$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $ker(\phi) = 0$.

3.2 Własność uniwersalna ilorazu: dla każdego homomorfizmu $\phi : G \to H$ takiego, że $N \subset ker(\phi)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{\phi} : G/N \to H$ taki, że $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$.

3.3 Działanie z lewej strony grupy G na zbiorze A, to homomorfizm $G \to Aut(A)$.

3.4 Działanie z prawej strony: $(g, x) \mapsto g(x)$, $g(h(x)) = (hg)(x)$, piszemy $g(x) = xg$, wtedy $(xh)g) = x(hg)$.

3.5 Działanie grupy na sobie przez przesunięcia:
– $h \mapsto gh$ (z lewej strony)
– $h \mapsto hg$ (z prawej strony)

3.6 Cayleya: każda podgrupa jest izomorficzna z pewną grupą przekształceń. Jeśli $|G| = n$, to $G \hookrightarrow \Sigma_n$.

3.7 Niech $H < G$. Rozwarzamy działanie (z prawej strony) H na G przez przesunięcia. Zbiór warstw G/H jest ilorazem zbioru G przez to działanie.

3.8 Działanie grupy na sobie przez sprzęganie. Automorfizmy wewnętrzne.

3.9 Orbity $G \cdot a$, stabilizatory G_a, zbiór punktów stałych A^G.

3.10 Dla $a \in A$ odwzorowania $G/G_a \to G \cdot a$, $gG_a \mapsto ga$ jest dobrze okrełone i jest bijekcją. Wniosek, jeśli $|G| < \infty$ to $|G \cdot a| = (G : G_a)$.

3.11 Definicja: Niech p będzie liczbą pierwszą. Mówimy, że G jest p-grupą, gdy $|G| = p^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

3.12 Twierdzenie: Jeśli G jest p-grupą, $|A| < \infty$, to $|A^G| \equiv |A| \mod p$.

3.13 Tw Cauchy'ego: Jeśli p dzieli rząd grupy, to istnieje element rzędu p.
Dowód: na zbiorze $A = \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \ldots g_p = e\} \simeq G^{p-1}$ działa grupa $\mathbb{Z}_p$ przez cykliczną permutację ciągów, $A^{\mathbb{Z}_p}$ to ciągi stałe $(g, g, \ldots, g)$, $g^p = e$. Z poprzedniego twierdzenia p dzieli $|A^{\mathbb{Z}_p}|$, przy czym $A^{\mathbb{Z}_p} \neq \emptyset$.

3.14 Centrum p-grupy jest nietrywialne.
Dow. G działa na sobie przez sprzężenia, $G^G = Z(G)$. Skoro $e \in Z(G) \neq \emptyset$, to p dzieli $|Z(G)|$.

3.15 Wniosek. Jeśli $|G| = p^2$, to G jest abelowa.

4 Produkty, twierdzenia Sylowa

4.1 Wewnętrzna charakteryzacja produktu

4.2 Przykąd: $\mathbb{Z}_{12} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ jako produkt podgrup

4.3 Produkt pólprosty $N \rtimes H$ w sytuacji gdy dana grupa N oraz homomorfizm $\phi : H \to Aut(N)$. Definiujemy działanie $(a, g)(b, h) = (ag(b), gh)$ spełnia aksjomaty grupy. (Ćwiczenie).

4.4 Przykład $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. Produkt warkoczowy $G^n \rtimes \Sigma_n$.

4.5 Definicja: G jest grupą prostą gdy nie ma właściwej nietrywialnej podgrupy normalnej.

4.6 Przykłady grup prostych
– $\mathbb{Z}_p$,
– $A_n = \ker(sgn : \Sigma_n \to \mathbb{Z}_2)$ dla $n \geq 5$,
– $PSL_n(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q)/Z(SL_n(\mathbb{F}_q))$ (poza $n = 2$ $q = 2$ lub 3),
– grupa monster $|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8 \cdot 10^{53}$

4.7 Grupy Sylowa, twierdzenia Sylowa [BT]. Niech p będzie liczbą pierwszą, $p^n m = |G|$, przy czym n jest maksymalne. Wtedy
– istnieje podgrupa $S < G$ rzędu p^n (podgrupa Sylowa),
– wszystkie podgrupy o tym rzędzie są sprzężone,
– niech n_p oznacza ilość podgrup o rzędzie p^n (podgrup Sylowa). Wtedy

- $n_p | m$ (dokładniej $n_p = (G : N(S))$, gdzie $N(S)$ jest normalizatorem P w G,
- $n_p = 1 \mod p$.

4.8 Wniosek: jeśli $|G| = pq$ (p, q pierwsze), to G nie jest prosta.
Dow. załóżmy, że $p > q = m$. Wtedy n_p może przyjmować wartości $1, 1 + p, 1 + 2p, \ldots$. Z drugiej strony $n_p | q$ oraz $q < 1 + p$. Zatem $n_p = 1$, czyli p-grupa Sylowa jest normalna.

5 Twierdzenia Sylowa, abelianizacja, rozwiązalność

5.1 Lemat 1: jeśli p jest liczbą pierwszą, $p \not| m$, to współczynnik Newtona $\binom{mp^n}{p^n} \equiv m \mod p$.

5.2 Lemat 2: Niech grupa G działa na zbiorze A, $|G| = mp^n$. Niech $B = \{x \in A \ : \ p \not| |Gx|\}$. Wtedy $|A| \equiv |B| \mod p$.

Dowód tw Sylowa — patz [Browkin, Teoria Ciał]. Kroki dowodu:

5.3 W dowodzie twierdzenia Sylowa niech A będzie zbiorem podzbiorów p^n-elementowych w G. Grupa G działa na sobie poprzez przesunięcia. Stąd G działa na zbiorze wszystkich podzbiorów G, zachowuje liczebność zbiorów, więc działa na A. Skoro $|A| = \binom{mp^n}{p^n}$, z lematów $B \neq \emptyset$. Dowodzimy, że stabilizator S zbioru $X \in B$ ma p^n elementów oraz X jest postaci Sx. (Musi być $|S| = p^n r$, $r | m$. Z drugiej strony S działa na zbiorze X. To działanie jest wolne, więc $|S| \leq |X| = p^n$.)

5.4 Mamy bijekcję pomiędzy orbitami w B oraz podgrupami Sylowa. Każda orbita w B ma m elementów. Stąd $n_p m \equiv \binom{mp^n}{p^n} \equiv m \mod p$, więc $n_p \equiv 1 \mod p$.

5.5 Aby dowieść, że podgrupy Sylowa są sprzężone dowodzimy czegoś ogólniejszego: Niech $P < G$, $|P| = p^k$, wtedy istnieje $g \in G$ takie, że $P \subset gSg^{-1}$. Dowód: P działa na warstwach G/S. Skoro $|G/S| = m$, to istnieje punkt stały: $PgS = gS$. Zatem $\forall h \in P$ mamy $hg \in gS$. Stąd $h \in gSg^{-1}$, czyli $P \subset gSg^{-1}$.

5.6 Aby dowieść, że $n_p | m$ rozważamy inne działanie: G działa przechodnio (tzn jest jedna orbita) na grupach Sylowa przez sprzężenie oraz stabilizator S zawiera S.

⋆⋆⋆⋆⋆

5.7 Przykład: jeśli $|G| = 196$ to G nie jest prosta. Dowód: sprawdzamy, że $n_7 = 1$, zatem 7-podgrupa Sylowa jest normalna.

5.8 Grupa rzędu 255 jest cykliczna. (Bo 17-podgrupa Sylowa jest normalna oraz nie ma nietrywialnych działań $\mathbb{Z}_{15}$ na $\mathbb{Z}_{17}$.)

5.9 Komutant $[G, G]$ to podgrupa generowana przez komutatory $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$. Inne oznaczenie G'. Abelianizacja $Ab(G) = G/[G, G]$.

5.10 Dla grupy abelowej A mamy $\mathrm{Hom}(G, A) = \mathrm{Hom}(Ab(G), A)$.

5.11 **Ćwiczenie:** $Ab(GL_n(\mathbb{K})) =?$

5.12 Rozważamy ciągi podgrup $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = \{1\}$ taki, że $G_i \rhd G_{i+1}$. (Nie koniecznie $G_i \rhd G$.)

5.13 Mówimy, że grupa jest rozwiązalna gdy istnieje ciąg taki, że G_i/G_{i-1} jest grupą abelową.

5.14 Gdy G_i/G_{i+1} jest abelowa, to $[G_i, G_i] < G_{i+1}$. Definiujemy ciąg minimalnej długości: $G_1 := [G, G] = G'$,..., $G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

5.15 Stwierdzenie (oczywiste): Grupa jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla $i > i_0$ dla pewnego i_0 mamy $G^{(i)} = \{1\}$.

6 P-grupy, klasyfikacja grup abelowych, skończenie generowanych

6.1 p-grupy są rozwiązalne

6.2 Niech $p \neq 2$. Udowodnimy, że Grupa nieabelowa rzędu p^3 jest produktem półprostym $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$ lub $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes \mathbb{Z}_p$ skoro $Z(G) \neq G$ i $G/Z(G)$ nie jest grupą cykliczną, to $Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p$ i $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Niech $a, b \in G$ będą takie, że $\pi(a)$ i $\pi(b)$ generują $G/Z(G)$.
– Mamy $[G, G] \subset Z(G)$.
– Grupa $H = \langle a, Z(G) \rangle$ ma p^2 elementów, jest abelowa i normalna ($bab^{-1} = [b, a]a \in H$). Jeśli $b^p = 1$, to $G = H \rtimes \langle b \rangle$. Przypuśćmy przeciwnie, $o(b) = p^2$ i także $o(a) = p^2$, a^p jest generatorem $Z(G)$. Wtedy

$b^p = a^{pk}$ dla pewnego k. Pokażemy, że $b' = a^{-k}b$ jest rzędu p. Zamieniając b na b' otrzymujemy produkt półprosty.

[– Lemat: jeśli $[d,b] \in Z(G)$ to $(db)^p = [d,b]^{\frac{p(p-1)}{2}} d^p b^p$

Dow: mamy $bd = bdb^{-1}d^{-1}db = [b,d]db = db[b,d]$. Uporządkowanie wyrażenia $(db)^k$ wymaga $\frac{p(p-1)}{2}$ przestawień.]

– Z lematu dla $d = a^{-k}$ mamy $(b')^p = b^p a^{-kp}[a^{-k},b]^{\frac{p(p-1)}{2}} = b^p a^{-kp} = 1$, bo $[a^{-k},b]^p = 1$.

6.3 Twiedzenie Jordan-Hölder: Niech $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = \{1\}$ taki, że $G_i \rhd G_{i+1}$ oraz G_i/G_{i+1} jest grupą prostą (tzn ciągu nie można rozdrobnić). Wtedy, zbiór ilorazów wraz z krotnościami nie zależy od ciągu G_i. (bez dowodu)

Przykład: $D_{12} > \mathbb{Z}_6 > \mathbb{Z}_3$ i $D_{12} > D_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 > \mathbb{Z}_2$.

Twierdzenie strukturalne dla skończenie generowanych grup abelowych — Klasyfikacja

6.4 Każda grupa abelowa skończenie generowana jest izomorficzna z ilorazem $\mathbb{Z}^n/\Lambda$, gdzie Λ jest podgrupą w $\mathbb{Z}^n$.

6.5 Niech Λ będzie podgrupą w $\mathbb{Z}^n$. Istnieje baza $\mathbb{Z}^n$: $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{Z}^n$, $s \le n$ oraz liczby $n_1, n_2, \dots n_s \in \mathbb{N}$, takie, że $n_1v_1, n_2v_2, \dots, n_sv_s$ jest bazą Λ.

Dow: Powyższe stwierdzenie jest równoważne temu, że macierz całkowitoliczbową można sprowadzić do postaci $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, gdzie D jest kwadratową macierzą diagonalna, a 0 oznacza prostokątny blok zerowy. Operacje dozwolone: przestawianie wierszy lub kolumny, transformacje $w_i' = w_i + aw_j$, $k_i' = k_i + ak_j$ dla $i \neq j$.

6.6 Wniosek: Podgrupy w $\mathbb{Z}^n$ są izomorficzne z $\mathbb{Z}^s$, $s \le n$.

6.7 Wniosek: A skończenie generowana, to $A \simeq \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{n_i} \times \mathbb{Z}^r$.

6.8 Rozkład skończonej grupy cyklicznej na produkt grup cyklicznych o rzędach względnie pierwszych.

6.9 Jednoznaczność przedstawienia skończenie generowanej grupy abelowej: Jeśli $A = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{p^{n_i}}$

$$|\{a \in A \ : \ a^{p^k} = 1\}| = \prod_{i=1}^{s} p^{min(n_i,k)} .$$

Z tego wzoru można wyznaczyć n_i.

7 Koniec grup

Grupy abelowe c.d., nilpotentne, wzrost grupy

7.1 Podpodgrupa elementów torsyjnych grupy abelowej

$$T(A) = \{a \in A \mid \exists n > 0 \ a^n = 1\},$$

p-torsja

$$T_p(A) = \{a \in A \mid \exists k > 0 \ a^{p^k} = 1\}.$$

7.2 $A/T(A)$ jest beztorsyjna czyli $T(A/T(A)) = 0$
Dw: $[a]^n = 1$ to $a^n \in T(A)$, więc $(a^n)^m = 1$.

7.3 Jeśli grupa jest skończenie generowana, to $A/T(A) \simeq \mathbb{Z}^r$. Liczba r jest nazywana rangą grupy $r = rk(A)$. (Ćw: $\mathbb{Z}^m \simeq \mathbb{Z}^n \Rightarrow m = n$.)

7.4 Jeśli A torsyjna (czyli $A = T(A)$), to $A = \bigoplus_{p \text{ pierwsza}} T_p(A)$
(to jest wewnętrzna suma prosta: tzn (i) $T_p(A)$ generują A, (ii) $\forall_p\ T_p(A) \cap \left(\bigoplus_{q<p} T_q(A)\right) = 0$.)
Dw: $a^m = 1$, $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$, $m_j := \prod_{i \neq j} p_i^{k_i}$, $a_j := a^{m_j} \in T_{p_j}(A)$. Wspólny dzielnik $(m_1, \ldots, m_s) = 1$, więc $1 = \sum c_j m_j$ dla pewnych $c_j \in \mathbb{Z}$. Zatem $a = \prod a_j^{c_j}$.

7.5 Beztorsyjne grupy abelowe skończenie generowane są izomorficzne z $\mathbb{Z}^n$, czyli mają bazę.

7.6 Niech $n \in \mathbb{N}$. Wolna grupa abelowa $F_n^{ab} = \mathbb{Z}^n$ ma własność: dla grupy abelowej A mamy $Hom(\mathbb{Z}^n, A) = Funkcje([n], Zbiòr\, A)$. Można też rozważać wolne grupy o generatorach w dowolnym zbiorze X. Taka grupa wolna FA_X jest zdefiniowana przez własność $Hom(F_X^{ab}, A) = Funkcje(X, Zbiòr\, A)$. Grupa F_X^{ab} jest izomorficzna z $\bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}$ i jest właściwą podgrupą w $\prod_{x \in X} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^X$.

7.7 Jeśli F wolna abelowa i $A \to B$ epi wtedy $Hom(F, A) \to Hom(F, B)$ epi.

7.8 **Ćwiczenie:** Grupa beztorsyjna może nie mieć powyższej własności

7.9 Definicja. Grupa jest nilpotentna, jeśli istnieje ciąg podgrup $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = 1$ taki, że $[G, G_i] < G_{i+1}$. Wtedy mamy $G_i \lhd G$, bo $gg_ig^{-1} \in [G, G_i]G_i \subset G_{i+1}G_i$. Ponadto $[G_i, G_i] < G_{i+1}$, stąd iloraz G_i/G_{i+1} jest abelowy.

7.10 Równoważnie: $Z(G/G_{i+1}) < G_i/G_{i+1}$.

7.11 Przykład: macierze górnotrójkątne z 1 na przekątnej.

7.12 Dla grupy nilpotentnej są dwa wyróżnione ciągi: pierwszy, zdefiniowany indukcyjnie $\Gamma_0 = G$, $\Gamma_{i+1} := [G, \Gamma_i]$ mamy $\Gamma_i = 1$ dla $i >> 0$. To jest ,,dolny ciąg centralny".

7.13 ,,Górny ciąg centralny", hipercentra: $Z_1 = Z(G)$, $Z_{i+1} = \pi_i^{-1}(Z(G/Z_i))$, gdzie $\pi_i : G \to G/Z_i$. Mamy

$$Z_{i+1} = \{g \in G \mid \forall h \in G\ [g, h] \in Z_i\}$$

7.14 Grupa jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy $Z_i = G$ dla $i >> 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & < & Z_1 & < & Z_2 & < \ldots \leq & Z_{s-1} & \leq & Z_s & \leq & Z_{s+1} \\
\| & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
1 = G_{s+1} & < & G_s & < & G_{s-1} & < \ldots < & G_2 & < & G_1 & < & G_0 = G \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \| \\
\Gamma_{s+1} & \leq & \Gamma_s & \leq & \Gamma_{s-1} & \leq \ldots < & \Gamma_2 & < & \Gamma_1 & < & \Gamma_0
\end{array}$$

7.15 Stopień nilpotentności u. Dla dowolnych elementów $g_1, \ldots, g_{u+1}$ jest spełniona formuła:

$$[g_1[g_2[\ldots[g_u, g_{u+1}]\ldots] = 1\,.$$

7.16 Grupy nieskończone, ale skończenie generowane:
- norma $|g|$ = długość najkrótszego słowa reprezentującego g
- metryka słów $d(g,h) = |gh^{-1}|$,
- przestrzenie metryczne G z metryką słów,
- wzrost grupy: $f(n) = |Kula(1,n)|$. Różne wybory generatorów prowadzą do równoważnych funkcji wzrostu. Funkcje wzrostu porównywane są tak: $f \prec g$ jeśli istnieją stałe takie, że $f(n) < C\,g(dn)$ dla wszystkich n.

7.17 Grupy abelowe $\mathbb{Z}^r \times torsja$ mają wzrost wielomianowy n^r.

7.18 Grupa wolna o r generatorach ma wzrost wykładniczy $(2r-1)^n$.

7.19 Grupy nilpotentne maja wzrost wielomianowy (Tw Bassa) n^r, gdzie $r = \sum_{k\geq 0}(k+1)rk(\Gamma_k/\Gamma_{k+1})$. Np grupa Heisenberga $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset GL_3(\mathbb{Z})$ ma wzrost $\sim r^4$.

7.20 Twierdzenie Gromowa: jeśli grupa ma wzrost wielomianowy to zawiera podgrupę nilpotentną skończonego indeksu.

7.21 **Ćwiczenie:** $SL_2(\mathbb{Z})$ ma wzrost wielomianowy.