Algebra I - Łatwe zadania do samodzielnego rozwiązania

1 Grupy

1 Sporządzić tabelkę działań dla grupy D_{2n}.

2 Sprawdzić, że w grupie D_{2n}, dla $n > 2$ istnieje tylko jedna podgrupa cykliczna rzędu n.

3 W grupie Σ_6 policzyć złożenie $(123)(546)(231)(46)$ przedstawiając je w postaci iloczynu cykli rozłacznych.

4 Cykl (453687) przedstawić w postaci transpozycji.

5 Permutację zbioru siedmioelementowego $f(1) = 4,\ f(2) = 2,\ f(3) = 6,\ f(4) = 3,\ f(5) = 1,\ f(6) = 7,\ f(7) = 5$ rozłożyć na cykle rozłączne.

6 Podać przykład podgrupy $H \subset D_6$ i elementu x takiego, że $xH \neq Hx$.

7 W grupie macierzy górnotrójkątnych o współczynnikach w $\mathbb{Z}$ rozmiaru 2×2 wskazać dwa elementy rzędu 2, których iloczyn ma rząd nieskończony.

8 Jakie są największe rzędy elementów w grupach permutacji Σ_9 i Σ_{15}.

9 Czy w Σ_{10} istnieją dwa elementy rzędu n, które mają różne rozkłady na cykle rozłączne? a) $n = 12$, b) $n = 9$.

10 Wypisać rzędy elementów w grupie cyklicznej $\mathbb{Z}_{12}$ i w D_{24}. Podać ile jest elementów danego rzędu.

11 a) Niech $Q_8 = \langle a, b\rangle \subset GL_2(\mathbb{C})$, $a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ile elementów ma ta grupa? Opisać wszystkie podgrupy i znaleźć rzędy elementów.
b) Ile elementów ma grupa $\langle c, b\rangle \subset GL_2(\mathbb{C})$, $c = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$? Czy zawiera grupę Q_8?

12 Rozważmy grupy $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n} \subset \mathbb{C}^*$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że wśród tych grup żadne dwie nie są izomorficzne.

13 Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. $a \in G$. Wykazać, że $o(f(a))$ dzieli $o(a)$ o ile ten drugi jst skończony

14 Grupa $GL_n(\mathbb{C})$, tzn. macierzy odwracalnych $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{C}$ działa na zbiorze wszystkich macierzy $n \times n$ poprzez sprzęganie:

$$C \cdot A := CAC^{-1}\,.$$

Opisać orbity działania.

15 Grupa macierzy odwracalnych $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$ działa na zbiorze symetrycznych macierzy w następujący sposób:

$$C \cdot A := CAC^T\,.$$

Opisać orbity działania.

16 Grupa macierzy izometrii $O(n)$ działa na zbiorze symetrycznych macierzy w następujący sposób:

$$C \cdot A := CAC^T\,.$$

Opisać orbity i stabilizatory punktów.

17 Niech $G < \Sigma_4$. Rozpatrzmy naturalne działanie G na zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Znaleźć orbity tego działania i grupy izotropii każdego punktu gdy $G = \langle(123)\rangle$ i $G = A_4$ (grupa parzystych permutacji).

18 Czy grupa rzędu 27 może działać na zbiorze 35 elementowym bez punktow stałych?

19 Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X oraz x i y leżą w jednej orbicie. Wykazać, że grupy izotropii G_x i G_y dla $x, y \in G$ są sprzężone (tzn $\exists g \in G\ gG_xg^{-1} = G_y$).

20 Niech $H < G$ i niech $\rho^H : G \to \Sigma_{|G/H|}$ będzie homomorfizmem odpowiadającym działaniu G na zbiorze warstw G/H danym wzorem: $g(g'H) = gg'H$. Znalezc $ker(\rho^H)$.

21 Ile jest homomorfizmów z Z_{24} do D_{24}?

22 Przypuśćmy, że grupa G ma pq elementów, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, p nie dzieli $q - 1$. Udowodnić, że jeśli w G jest tylko jedna podgrupa rządu q, to G jest cykliczna.

23 Czy $D_4 = Q_8$? Opisać wszystkie homomorfizmy $D_4 \to Q_8$.

24 Znaleźć centralizator $g \in \Sigma_6$ gdy
– $g = (123)(45) \in \Sigma_6$,
– $g = (123)(456) \in \Sigma_6$,
– $g = (12)(34)(56) \in \Sigma_6$.
(Definicja: Centralizator elementu $C_G(g) = \{h \in G \mid \forall h \in G\ gh = hg\}$.)

25 Udowodnić, że dla $n > 2$, $Z(\Sigma_n) = 1$.

26 (a) Znaleźć $Z(A_4)$.
b) Wykazac, że w A_4 istnieje tylko jedna podgrupa rzędu 4, więc jest ona normalna.
c) Udowodnić, że w A_4 nie istnieje podgrupa rzędu 6.

27 Niech $H \triangleleft G$. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in G$ jeżeli $xy \in H$ to $yx \in H$. Podać przykład, że jeżeli tylko $H < G$ to wynikanie nie ma miejsca.

28 Pokazać, że każda podgrupa w Q_8 jest normalna, choć Q_8 nie jest abelowa.

29 Udowodnić, że jeżeli $K \triangleleft G$ to $Z(K) \triangleleft G$. Podać przykład, w którym $Z(K) \neq K \cap Z(G)$.

30 Udowodnić, ze jeżeli $[G, G] \leq H$, to podgrupa H jest normalna w G.

31 Wykazać, że jeśli $|G| = p^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą, to G jest abelowa.

32 Udowodnić, że $Q_8/\{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

33 Załóżmy, że H_i jest podgrupą normalną w G_i dla $i = 1, 2$. Udowodnić, że $H_1 \times H_2$ jest normalna w $G_1 \times G_2$ i $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \simeq G_1/H_1 \times G_2/H_2$.

34 Niech $K < H < G$ oraz niech K i H będą podgrupami normalnymi. Wtedy $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.

35 Podać przykład grupy G i jej podgrup $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ takich, że $K \simeq H$ ale $G/K \not\simeq G/H$.

36 Podac przyklad grupy G i jej podgrup $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ takich, że $G/K \simeq G/H$ ale $K \not\simeq H$.

37 Niech $n > 2$. Udowodnić, że jeżeli n jest nieparzyste, to $Z(D_{2n}) = 1$, zaś jeżeli n jest parzyste to $|Z(D_{2n})| = 2$. Udowodnić, że w tym ostatnim przypadku $D_{2n}/Z(D_{2n}) \simeq D_n$ dla $n \geq 4$.
(Dla $n = 4$ mamy $D_8/Z(D_8) \simeq D_4 = \langle S, R \mid S^2 = 1,\ R^2 = 1,\ SRS = R\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.)

38 Niech $n > 2$. Opisać $D_{2n}/[D_{2n}, D_{2n}]$ w zależności od parzystości n.

2 Pierścienie

39 Znaleźć dzielniki zera, elementy odwracalne i nilpotentne w $\mathbb{Z}_{24}$ i $\mathbb{Z}_{16}$.

40 Czy $\mathbb{Z}_{24}$ zawiera podpierścień izomorficzny z $\mathbb{Z}_8$?

41 Znaleźć podpierścienie pierścienia $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

42 Udowodnić, że jeśeli R jest nieskonczoną, dziedziną calkowitości, to homomorfizm $\Phi : R[X] \to R^R$ dany wzorem $\Phi(f)(a) = f(a)$ jest monomorfizmem.

43 Udowodnić, że jeśeli x jest elementem nilpotentnym w pierścieniu R to $1 - x$ jest elementem odwracalnym. Wywnioskować, że suma elementu nilpotentnego i odwracalnego jest elementem odwracalnym.

44 Znaleźć elementy odwracalne w $\mathbb{Z}_4[X]$.

45 Udowodnić, że niezerowy pierścien skończony jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera właściwych dzielnikow zera.

46 Wykazać, że jeżeli R jest dziedziną całkowitości to $R[X]$ także jest dziedziną calkowitości. (Udowodnić także, że pierścień szeregów formalnych $R[[X]]$ jest dziedziną całkowitości.)

47 Znaleźć wszystkie ideały pierścienia $\mathbb{Z}_{15}$ i $\mathbb{Z}_{16}$. Wskazać wśrod nich pierwsze i maksymalne. Znaleźć pierścienie ilorazowe.

48 Czy pierścień $\mathbb{Z}_8$ jest obrazem homomorficznym pierścienia Z_{24}?

49 Pokazać, że ideał pierścienia skończonego jest pierwszy wtedy i tylko wtedy gdy jest maksymalny.

50 Pokazać, że jeżeli $p|n$ to nie istnieje homomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \to \mathbb{Z}_p$, gdzie $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ jest podpierścieniem $\mathbb{Q}$ generowanym przez $\frac{1}{n}$.

51 Udowodnić, że w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ każdy ideał jest główny.

52 Udowodnić, że pierścień $R[X]$ jest dziedziną ideałow głównych wtedy i tylko gdy R jest ciałem. Podać przykład ideału w $\mathbb{Z}[X]$, który nie jest główny.

53 Niech I_1 oraz I_2 będą ideałami pierścienia R. Wykazać, że zbiór $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2\}$ jest ideałem generowanym przez $I_1 \cup I_2$.

54 Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni:
a) $\mathbb{Z}[X]/(X^2) \to Z_{24}$
b) $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - Y^3) \to \mathbb{Z}$
c) $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1) \to \mathbb{Q}$
d) $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1) \to \mathbb{C}$

55 Wykazać, że $\delta(a + b\sqrt{5}) = |a^2 - 5b^2|$ nie jest normą euklidesową, w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

56 Znaleźć ciało ułamkow pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

57 Znaleźć ciało ułamkow pierścienia $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 + Y^2)$.

58 Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu, a $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nią nie jest.

59 Udowodnić, że jeżeli K jest ciałem, to $K[X,Y]$ jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu, ale $K[X,Y]/(X^2 - Y^2)$ nią nie jest, (jednoznaczność rozkladu nie dziedziczy się na pierścienie ilorazowe).

60 Udowodnić, że jeżeli K jest ciałem, to podpierścien $K[X^2, X^5]$ pierścienia $K[X]$ nie jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu. (jednoznaczność rozkładu nie dziedziczy się na podpierścienie).

61 Znaleźć stosując algorytm Euklidesa $NWD(3456, 18564)$. Zapisać NWD jako kombinację liczb 3456 i 18564.

62 Wiedząc, że $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ jest pierścieniem euklidesowym znaleźć przy pomocy algorytmu Euklidesa $NWD(6 + 4\sqrt{-2}, 8 - 2\sqrt{-2})$.

63 W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[X]$ znaleźć generator ideału $(x^3 - x^2 + 2x + 3, x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2)$.

64 Zbadać, które z niżej podanych wielomianów są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$:
a) $2x^8 + 22x^3 - 66x + 44$
b) $x^4 - 21$
c) $70x^4 + 315x^3 + 105$
d) $54x^4 - 108x^3 + 27$

65 Zbadać czy rozkładalne są wielomiany:
a) $x^4 + 15x^3 + 7$ w $\mathbb{Z}_5[x]$
b) $x^4 + 7$ w $\mathbb{Z}_{17}[x]$
c) $x^3 - 5$ w $\mathbb{Z}_{11}[x]$

66 Zbadać rozkladalność nad $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ wielomianu $x^4 + 15x^3 + 7$. (Wskazówka: zredukować modulo 5.)

67 Znaleźć kryterium nierozkladalności wielomianów stopnia 2 nad ciałem charakterystyki różnej od 2.

68 Wypisać nierozkładalne wielomiany stopnia 2 nad ciaiem $\mathbb{Z}_5$.

69 Udowodnić, że $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3) \simeq \mathbb{C}[t^2, t^3]$.

70 Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że wielomian $x^{p-1} + ... + x + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.