II Kolokwium z Algebry, 17 I 2020

Punktacja: zadania I–II po 10pt, zadanie III za 12pt, każdy podpunkt z części drugiej po 4pt. Rozwiązania zadań I–III proszę oddawać na oddzielnych kartkach.

Zadanie I.

Niech K będzie ciałem skonczonym, a $f \in K[X]$ wielomianem o niezerowym wyrazie wolnym. Wykazać, że f dzieli $X^n - 1$ dla pewnego n.

Zadanie II.

Udowodnić, że jeżeli w pierścieniu R dla każdego elementu x istnieje $n \in N$ (zależne od x), $n > 1$ takie, że $x^n = x$, to każdy ideał pierwszy w R jest maksymalny.

Zadanie III.

Niech $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ będzie ciałem. Mówimy, że $a \in \mathbb{K}$ jest całkowity, gdy jest pierwiastkiem wielomianu postaci $a_o + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Pokazać, że jeżeli $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0, 1$ i d bezkwadratowa, to zbiór elementów całkowitych ciała $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ jest równy:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \quad \text{dla} \quad d \equiv 2, 3\,(mod\;4), \qquad\qquad \mathbb{Z}[\tfrac{-1+\sqrt{d}}{2}] \quad \text{dla} \quad d \equiv 1\,(mod 4).$$

Część Druga

Proszę podać krótkie uzasadnienie.

1 Zbadać, czy poniższy pierścień ilorazowy jest ciałem

$$\mathbb{Z}_3[X]/(x^3 + x^2 + x + 1, x^4 - x^2 + 1)\,.$$

2 Ile elementów ma pierścień $\mathbb{Z}[i]/(4+3i)$? Czy ma dzielniki zera?

3 Uzasadnić, że poniższy układ kongruencji ma rozwiązanie w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$:

$$a \equiv i \mod 1+2i\,, \quad a \equiv 1 \mod 7\,, \quad a \equiv 1+2i \mod 3.$$

4 Obliczyć $NWD(6+4\sqrt{-2}, 8-2\sqrt{-2}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

5 Zbadać, czy wielomian $2X^8 + 22X^3 - 66X + 44$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ i w $\mathbb{Q}[X]$:

6 Czy $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ jest elementem nierozkładalnym, czy jest elementem pierwszym?

7 Znaleźć ideały maksymalne pierścienia $\mathbb{Z}_5[X]/(X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$.

8 Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}][X]/(X^2+4)$ w pierścień $\mathbb{Z}_{10}$.

9 Niech $R = \mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x^2+x+1)$. Opisać grupę automorfizmów R.

10 Niech $I = (x^7y^3, x^2 - zy^2) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$. Przedstawić $\sqrt{I}$ jako część wspólną skończonej liczby idałów pierwszych.