Algebra I - pierścienie

1 Znaleźć dzielniki zera, elementy odwracalne i nilpotentne w $\mathbb{Z}_{24}$ i $\mathbb{Z}_{16}$.

2 Czy $\mathbb{Z}_{24}$ zawiera podpierścień izomorficzny z $\mathbb{Z}_8$?

3 Znaleźć podpierścienie pierścienia $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4 Udowodnić, że jeśeli R jest nieskonczoną, dziedziną calkowitości, to homomorfizm $\Phi : R[X] \to R^R$ dany wzorem $\Phi(f)(a) = f(a)$ jest monomorfizmem.

5 Udowodnić, że jeśeli x jest elementem nilpotentnym w pierścieniu R to $1 - x$ jest elementem odwracalnym. Wywnioskować, że suma elementu nilpotentnego i odwracalnego jest elementem odwracalnym.

6 Znaleźć elementy odwracalne w $\mathbb{Z}_4[X]$.

7 Udowodnić, że niezerowy pierścien skończony jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera właściwych dzielnikow zera.

8 Wykazać, że jeżeli R jest dziedziną całkowitości to $R[X]$ także jest dziedziną calkowitości. (Udowdnić także, że pierścień szeregów formalnych $R[[X]]$ jest dziedziną całkowitości.)

9 Znaleźć wszystkie ideały pierścienia $\mathbb{Z}_{15}$ i $\mathbb{Z}_{16}$. Wskazać wśrod nich pierwsze i maksymalne. Znaleźć pierścienie ilorazowe.

10 Czy pierścień $\mathbb{Z}_8$ jest obrazem homomorficznym pierścienia Z_{24}?

11 Pokazać, że ideał pierścienia skończonego jest pierwszy wtedy i tylko wtedy gdy jest maksymalny.

12 Pokazać, że jeżeli $p|n$ to nie istnieje homomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \to \mathbb{Z}_p$, gdzie $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ jest podpierścieniem $\mathbb{Q}$ generowanym przez $\mathbb{Z}$ i $\frac{1}{n}$.

13 Czy pierścien $\mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ jest dziedziną całkowitości?

14 Udowodnić, że podzbiór elementów nilpotentnych pierścienia jest ideałem. Wykazać, ze ideał ten jest iloczynem wszystkich ideałow pierwszych pierścienia.

15 Udowodnić, że jeżeli w pierścieniu R dla kazdego elementu x istnieje $n \in \mathbb{N}$ (zależne od x) takie, że $x^n = x$, to każdy ideał pierwszy w R jest maksymalny.

16 Czy ideał $(7 + \sqrt{5})$ jest maksymalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$? A ideał $(4 + \sqrt{5})$?

17 Udowodnić, że w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ każdy ideał jest główny. Podać przyklad ideału w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest główny.

18 Udowodnić, że pierścień $R[X]$ jest dziedziną ideałow głównych wtedy i tylko gdy R jest ciałem. Podać przykład ideału w $\mathbb{Z}[X]$, który nie jest główny.

19 Niech I_1 oraz I_2 będą ideałami pierścienia R. Wykazać, że zbiór $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2\}$ jest ideałem generowanym przez $I_1 \cup I_2$.

20 Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni:
a) $\mathbb{Z}[X]/(X^2) \to Z_{24}$
b) $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 - Y^3) \to \mathbb{Z}$
c) $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1) \to \mathbb{Q}$
d) $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1) \to \mathbb{C}$

21 Wykazać, że $\delta(a+b\sqrt{-2}) = a^2+2b^2$ jest normą, euklidesową, w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Analogicznie dla $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

22 Wykazać, że $\delta(a+b\sqrt{5}) = |a^2-5b^2|$ nie jest normą euklidesową, w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

23 Pokazac, że dla pierścienia R następujące warunki są równoważne:
a) suma elementów nieodwracalnych jest elementem nieodwracalnym,
b) zbiór elementów nieodwracalnych jest ideałem,
c) w R istnieje dokladnie jeden ideał maksymalny.
Pierścien, jak wyżej nazywa sie lokalnym.

24 Udowodnić, że jeżeli $I \subset R$ jest ideałem pierwszym, zaś $S = R - I$ to pierścien $S^{-1}R$ jest lokalny.

25 Udowodnić, że $K[[X]]$ jest pierścieniem lokalnym, gdzie K jest ciałem.

26 Znaleźć ciało ułamkow pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

27 Znaleźć ciało ułamkow pierścienia $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+Y^2)$.

28 Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu, a $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nią nie jest.

29 Udowodnić, że jeżeli K jest ciałem, to $K[X,Y]$ jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu, ale $K[X,Y]/(X^2-Y^2)$ nią nie jest, (jednoznaczność rozkladu nie dziedziczy się na pierścienie ilorazowe).

30 Udowodnić, że jeżeli K jest ciałem, to podpierścien $K[X^2,X^5]$ pierścienia $K[X]$ nie jest dziedziną z jednoznacznoscią rozkładu. (jednoznaczność rozkładu nie dziedziczy się na podpierścienie).

31 Udowodnić, że jeżeli R jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu zaś S systemem multyplikatywnym, to $S^{-1}R$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

32 Udowodnić, że dla liczby pierwszej $p > 2$ następujące warunki są rownoważne:
a) p jest elementem rozkładalnym pierścienia $\mathbb{Z}[i]$,
b) $p \equiv 1\ (mod\ 4)$,
c) $p = m^2+n^2$ dla pewnych $m,n \in \mathbb{N}$.
Wywnioskować, że w rozkładzie na czynniki pierwsze w $\mathbb{Z}$ liczby naturalnej l postaci $l = m^2+n^2$ każdy czynnik postaci $4k-1$ występuje w potędze parzystej.

33 Znaleźć $NWD(3456, 18564)$.

34 Wiedząc, że $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ jest pierścieniem euklidesowym znaleźć przy pomocy algorytmu Euklidesa $NWD(6+4\sqrt{-2}, 8-2\sqrt{-2})$.

35 W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[X]$ znaleźć generator ideału $(x^3-x^2+2x+3, x^4+4x^3+3x^2-2x+2)$.

36 Zbadać, które z niżej podanych wielomianów są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$:
a) $2x^8+22x^3-66x+44$
b) x^4-21
c) $x^4+x^3+x^2+x+1$
d) x^3-7x^2+3x+3

37 Zbadać czy rozkładalne są wielomiany:
a) x^4+15x^3+7 w $\mathbb{Z}_5[x]$
b) x^4+7 w $\mathbb{Z}_{17}[x]$
c) x^3-5 w $\mathbb{Z}_{11}[x]$

38 Zbadać rozkladalność nad $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ wielomianu x^4+15x^3+7. (Wskazówka: zredukować modulo 5.)

39 Czy $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+2)$ jest ciałem?

40 Znaleźć kryterium nierozkladalnosd wielomianów stopnia 2 nad ciałem charakterystyki różnej od 2.

41 Wypisać nierozkładalne wielomiany stopnia 2 nad ciaiem $\mathbb{Z}_5$.

42 Udowodnić, że $\mathbb{C}[x,y]/(x^2 - y^3) \simeq \mathbb{C}[t^2, t^3]$.

43 Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że wielomian $x^{p-1} + ... + x + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.