Zadania o pierścieniach

18.1.2015

Zadania zawierają odsyłacze do podręczników

[AMcD] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction To Commutative Algebra (wiele wydań)

[BB] A. Biaynicki-Birula, Zarys algebry, Bibl.Mat. 63, PWN, Warszawa 1987

[BT] A. Bojanowska, P. Traczyk, Algebra I (skrypt) http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaboj/algebra/algfinv1.pdf

[Br] J. Browkin, Teoria cia, Bibl.Mat.49, PWN, Warszawa 1977

[BJ] M. Bryński, J. Jurkiewicz, Zbiór zadań z algebry, PWN, Warszawa

1 Sprawdzić, że splot funkcji na grupie jest łączny.

2 Sprawdzić, że odwzorowanie z pierścienia funkcji gładkich do pierścienia szeregów formalnych polegające na braniu szeregu Taylora jest homomorfizmem pierścieni.

3 Pokazać, że jeżeli $a \in \mathbb{Z}_p^\wedge$ nie nalży do idału generowanego przez $p = \sum_{i=1}^{p} 1$, to a jest elementem odwracalnym.

4 Mówimy, że element $a \in R$ jest nilpotentny, jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $a^n = 0$. Udowodnić, że zbiór elementów nilpotentnych jest ideałem.

5 Udowodnić, że jeśli element u jest odwracalny, a n nilpotentny, to $u + n$ jest odwracalny.

6 Przypuśćmy, że $|R| < \infty$ oraz R nie ma dzielników zera. Udowodnić, że R jest ciałem.

7 Niech $R = \mathbb{Z}[Z_p]$ będzie pierścieniem grupowym.

a) Czy R ma dzielniki zera?

b) Czy R ma elementy nilpotentne?

c) Jakie ma elementy odwracalne?

8 Pomiędzy którymi pierścieniami istnieją odwzorowania: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_{(q)}$, $\mathbb{Z}[1/p]$, $\mathbb{Z}_[1/q]$, $\mathbb{Z}_p^\wedge$, $\mathbb{Z}_q^\wedge$, $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\mathbb{Z}_{q^m}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$? (Zrobić tabelkę)

9 Wskazać ideały pierwsze i maksymalne w 9d

a) $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Z}_{(p)}$,

c)$\mathbb{Z}[1/p]$,

d) (pis) $\mathbb{Z}_p^\wedge$.

Opisać pierścienie ilorazowe.

10 Dla jakiego n ideał $I =< x^n + 1 >\subset \mathbb{R}[x]$ jest pierwszy?

11 Wykazać, że w $\mathbb{R}[x]$ każdy ideał pierwszy jest maksymalny.

12 Czy ideał $< x^2 + y^2 - 1, (x + y)^2 - 1 >$ jest pierwszy w $\mathbb{R}[x, y]$?

13 (pis) Czy ideał $< x^2 + y^2 + 10y, x^2 - y > \subset \mathbb{Q}[x, y]$ można przedstawić jako część wspólną ideałów maksymalnych?

14 (pis) Oznaczmy przez $\xi \in \mathbb{C}$ pierwiastek pierwotny z 1 stopnia n. Niech generator grupy $\mathbb{Z}_n$ działa na $\mathbb{C}[x, y]$ poprzez działanie na zmiennych $x \mapsto \xi x$, $y \mapsto \xi^{-1} y$. Udowodnić, że zbiór punktów stałych działania $\mathbb{Z}_n$ jest podpierścieniem w $\mathbb{C}[x, y]$. Przedstawić ten pierścien jako iloraz pierścienia wielomianów od 3 zmiennych.

15 (pis) Niech $I, J \lhd R$ będą ideałami, oraz $I + J = R$.
a) Niech IJ oznacza podgrupę R rozpiętą przez iloczyny ab, gdzie $a \in I$, $b \in J$. Udowodnić, że zbiór (ideał) IJ jest równy $I \cap J$.
b) Udowodnić, że dla każdej pary $a, b \in R$ istnieje element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $x - a \in I$ oraz $x - b \in J$.

16 Czy ideał $< x^2 + y^2 + z^2 - 1, 4x^2 + 9y^2 - 1 >$ jest pierwszy w $\mathbb{R}[x, y, z]$?

17 W każdym pierścieniu zachodzi $R = R^* \sqcup \bigcup_{\mathfrak{m} \text{ maksymalny}} \mathfrak{m}$

18 $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n \in I\}$ jest ideałem.

19 Niech R dowolny pierścień. Jakie są elementy odwracalne w $R[x]$.

20 $R[x]$ jest DIG wtedy i tylko wtedy gdy R jest ciałem.

21 Udowodnić, że $\mathbb{Z}_p^{\wedge}[x]/(px - 1)$ jest ciałem.

Więcej zadań [M. Reid, Undergraduate Commutative Algebra, http://dmat.cfm.cl/library/ac.pdf].

22 † † † Czy ideał $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ 4x^2 + 9y^2 - 1)$ jest pierwszy w $R = \mathbb{R}[x, y, z]$?

Nie wiem jak rozwiązać to zadanie elmentarnie.
Rozwiązanie nieelementarne: równania $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $4x^2 + 9y^2 - 1$ opisują gładką krzywą $K_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$, która jest niespójna. Rozpatrując rozwiązania zespolone dostajemy gładką krzywą zespoloną (powierzchnię Riemanna) $K_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^3$. Ta krzywa jest już spójna. Pierścień $R_{\mathbb{C}}/I_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1, 4x^2 + 9y^2 - 1)$ jest pierścieniem funkcji wielomianowych na $K_{\mathbb{C}}$. Ponieważ $K_{\mathbb{C}}$ jest spójna i gładka, więc ten pierścień jest bez dzielników zera. A nasz pierścień ilorazowy R/I jest podpierścieniem w $R_{\mathbb{C}}/I_{\mathbb{C}}$, więc też nie ma dzielników zera.

23 R zawiera dokładnie jeden ideał pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego element nieodwracalny jest nilpotentny. (wsk. podzielić przez nilradykał)

24 (pis) Niech $I = \bigcap_{k=1}^{n} \mathfrak{m}_k$, gdzie $n > 1$ i $\mathfrak{m}_k$ są parami różnymi ideałami maksymalnymi. Udowodnić, że I nie jest pierwszy.

25 Czy jest prawdą, że: każdy element pierścienia jest odwracalny lub nilpotentny lub podzielny przez element pierwszy.

26 Udowodnić, że $(x^2 - 2) \lhd \mathbb{Q}[x]$ jest ideałem maksymalnym.

27 Ideał Jacobsona $\mathfrak{J} = \bigcap$ ideały maksymalne. Wykazać, że $x \in \mathfrak{J} \Leftrightarrow \forall y \in R$ element $1 - xy$ jest odwracalny.

28 (pis) Niech $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że R jest izomorficzny z $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (produkt pierścieni) jeśli $p \equiv 1 \bmod 6$ lub $\mathbb{F}_{p^2}$ (ciało o p^2 elementach) gdy $p \equiv 5 \bmod 6$.

29 (pis) Niech k będzie ciałem (aby nie musieć wyjaśniać, co to są pochodne załóżmy, że $k \subset \mathbb{C}$). Dana funkcja wielomianowa $f : k^n \to k^r$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n)),$$

gdzie $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Przez $f^* : k[y_1, \dots y_r] \to k[x_1, \dots x_n]$ oznaczmy przekształcenie zadane na generatorach $f^*(y_i) = f_i$. Niech $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ będzie dowolnym punktem oraz $f(a) = (b_1, \dots, b_r) \in k^r$. Definiujemy $\mathfrak{m}_a = \{g \in k[x_1, \dots, x_n] | g(a) = 0\}$ i analogicznie $\mathfrak{m}_b$. Mamy $f^*(\mathfrak{m}_b) \subset \mathfrak{m}_a$, więc dostajemy przekształcenie $\mathfrak{m}_b/\mathfrak{m}_b^2 \to \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ też oznaczane przez f^*.

a) Wykazać, że $f^* : \mathfrak{m}_b/\mathfrak{m}_b^2 \to \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy macierz

$$Df(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,n} \in M_{r \times n}(k)$$

ma rząd r.

b) Zakładając warunek a) wykazać, że $\overline{\mathfrak{m}}_a/\overline{\mathfrak{m}}_a^2 \simeq coker(f^* : (\mathfrak{m}_b/\mathfrak{m}_b^2) \to \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2))$, gdzie $\overline{\mathfrak{m}}_a$ jest obrazem ideału $\mathfrak{m}_a$ w pierścieniu ilorazowym $k[x_1, \dots, x_n]/(f_1 - b_1, \dots, f_r - b_r)$.

30 (pis) Niech α i β będą rozwiązaniami równania złotego podziału $x^2 = x + 1$. Niech $R = \mathbb{Z}[\alpha]$. Definiujemy funkcję: $v : R \to \mathbb{N}$, $v(a + b\alpha) = |(a + b\alpha)(a + b\beta)|$. Wykazać, że R jest pierścieniem euklidesowym z waluacją v. (Patrz zad 0.20 u Reida.)

31 Czy wielomian $x^{p-1} - 1$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{Z}_p^\wedge$?

32 Czy w $\mathbb{Z}_p^\wedge$ są pierwiastki z 1 stopnia p?

33 Przypuśćmy, że R zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny $\mathfrak{m}$ oraz $\bigcap_{k=1}^\infty \mathfrak{m}^k = 0$.
– Mówimy, że ciąg elementów pierścienia spełnia warunek Cauchy'ego jeśli

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n > n_0\ a_n - a_m \in \mathfrak{m}^r$$

– Mówimy, że ciąg elementów pierścienia jest zbieżny, jeśli istnieje $b \in R$ takie, że

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ a_n - b \in \mathfrak{m}^r$$

Załóżmy że w R jest spełnione: *każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.*
Udowodnić Lemat Hensela: Niech $f = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in R[x]$. Przypuśćmy, że $f_0 = [f] \in R/\mathfrak{m}[x]$ rozkłada się na wielomiany $f_0 = g_0 h_0$ takie, że $(g_0, h_0) = 1$. Wtedy istnieją wielomiany $g, h \in R[x]$, takie, że $f = gh$ oraz $[g] = g_0$, $[h] = h_0$.

34 Zrobić powyższe zadanie w łatwiejszej wersji, przy założeniu, że g_0 jest czynnikiem liniowym.

35 Niech I będzie ideałem oraz S systemem multiplikatywnym, $I \cap S = \emptyset$. Wykazać, że istnieje ideał pierwszy P taki, że $I \subset P$ oraz $P \cap S = \emptyset$. Wykazać, że za P można wziąć $\iota^{-1}(\mathfrak{m})$, gdzie $\mathfrak{m} \subset R_S$ jest pewnym ideałem maksymalnym, a $\iota : R \to R_S$ kanonicznym homomorfizmem.

36 R DJR. Mówimy, że $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ jest prymitywny, jeśli a_i nie mają wspólnych czynników. Udowodnić, że produkt wielomianów prymitywnych jest prymitywny.

37 Opisać grupę automorfizmów domknięcia algebraicznegp $\mathbb{F}_p$.

38 Niech $K = (\mathbb{F}_p[x^p]) \subset L = (\mathbb{F}_p[x])$ będą ciałami funkcji wymiernych. Czy istnieje wielomian $f \in K[y]$, którego pierwiastkiem jednokrotnym w L jest x?

39 Czy $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2+2)$ jest ciałem ? Znaleźć ideały maksymalne pierścienia $\mathbb{Z}_5[X]/(X^3+3X^2+2X+1)$.

40 Sprawdzić, że pierścień $\mathbb{Z}_7[X]/(X^3+2)$ jest ciałem. Znaleźć liczbe jego elementów. Korzystajac z algorytmu Euklidesa znaleźć w nim odwrotność elementu wyznaczonego przez wielomian $X+1$.

41 W pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$ znaleźć $NWD(2{+}11i, 1{+}3i)$. Znaleźć rozkład liczby 15 na czynniki nierozkładalne.

42 a) Pokazać, że w rozkładzie na czynniki pierwsze w $\mathbb{Z}$ liczby naturalnej będącej sumą kwadratów $l = m^2 + n^2$ każdy czynnik postaci $4k-1$ występuje w potędze parzystej.
b) Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k+1$ oraz postaci $4k+3$.

43 Pokazać, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nie istnieje $NWD(4, 2{+}2\sqrt{5})$. Podać przykład elementu nierozkładalnego w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest pierwszy. Podać przykład ideału w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest główny.

44 Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}][X]/(X^2+4)$ w pierścień $\mathbb{Z}_{10}$.

45 (pis) Udowodnić, że z dokładnością do stowarzyszenia elementami pierwszymi w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ są:

(a) $\sqrt{2}$

(b) liczby pierwsze całkowite postaci $8n \pm 3$

(c) dzielniki $a + b\sqrt{2}$, $b \neq 0$ liczb pierwszych całkowitych postaci $8n \pm 1$.

46 W pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ znaleźć:

(a) $NWD(a + b\sqrt{-2}, a - b\sqrt{-2})$

(b) $NWD(6 + 4\sqrt{-2}, 8 - 2\sqrt{-2})$.

47 (pis) Niech R będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu, zaś K jej ciałem ułamków. Udowodnić, że jeżeli dla $d \in R$ równanie $a^2 = d$ ma rozwiązanie w K, to ma rozwiązanie w R. Znaleźć kontrprzykład jeżeli R nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

48 W pierścieniu $\mathbb{Q}[X, Y]$ zbadać nierozkładalność wielomianu

$$f(X, Y) = X^5Y^3 + 5Y^6 + 5X^5 + 2X^2Y^3 + X^2Y + X.$$

49 Korzystając z kryterium Eisensteina udowodnić, że

$$f(X,Y) = X^4 + 2Y^2X^3 + 3Y^3X^2 + 4YX + 5Y + 6Y^2$$

jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}[X,Y]$.

50 (pis) Dla jakiego $a \in \mathbb{Q}$ pierścienie $\mathbb{Q}[X]/((X^2+2)(X-2))$ oraz $\mathbb{Q}[X]/((X^2+2X+3)(X+a))$ są izomorficzne? Podać izomorfizm (jeśli istnieje) dla $a = 3$ i $a = -2$.

51 Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $Z[X]/(X^2+7X+6) \longrightarrow Z_5$. Udowodnić, że to są faktycznie homomorfizmy i że to są rzeczywiście wszystkie.

Definicja uzupełnienia w ideale maksymalnym:

$$R_{\mathfrak{m}}^{\wedge} = \varprojlim_n R/\mathfrak{m}^n.$$

52 (pis) a) Niech $R_1 = \mathbb{C}[t]$ i $R_2 = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x(x^2-1))$. Niech $\mathfrak{m}_1 = (t) \subset R_1$ i $\mathfrak{m}_2 = (x,y) \subset R_2$ będą ideałami maksymalnymi. Wykazać, że $(R_1)_{\mathfrak{m}_1}^{\wedge} \simeq (R_2)_{\mathfrak{m}_2}^{\wedge}$.
b) *Dla chętnych: czy lokalizacje w dopełnieniach tych ideałów są izomorficzne?*

53 Czy $K[[X]]$ jest dziedziną Euklidesową? (W tym zadaniu K jest ciałem.)

54 Pokazać, że dla pierścienia R następujące warunki są równoważne:
a) suma elementów nieodwracalnych jest elementem nieodwracalnym
b) zbiór elementów nieodwracalnych jest ideałem
c) R jest pierścieniem lokalnym (tzn. zawiera tylko jeden ideał maksymalny).

55 Załóżmy, że jeżeli R jest pierścieniem Noetherowskim. Czy pierścień szeregów formalnych $R[[X]]$ jest także noetherowski?

56 Rozstrzygnąć, czy jeżeli dla każdego ideału pierwszego $I \triangleleft R$ pierścień lokalny $S^{-1}R$, gdzie $S = R \backslash I$, jest pierścieniem noetherowskim, to R musi być także pierścieniem noetherowskim.

Definicja: Pierścieniem elementów całkowitych ciała $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ nazywamy zbiór tych elementów, które są pierwiastkami wielomianów postaci $a_o + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

57 Sprawdzić, że zdefiniowany pierścień elementów całkowitych jest istotnie podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Pokazać, że jeżeli $d \neq 0, 1$ i d nie jest kwadratem w $\mathbb{Z}$, to podpierścień elementów całkowitych ciała $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ jest równy:

$$\begin{array}{cc} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{dla } d \equiv 2,3\,(mod\;4), \\ \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{d}}{2}] & \text{dla } d \equiv 1\,(mod 4). \end{array}$$

Spektrum pierścienia

58 Niech R będzie pierścieniem i niech $Spec\,R$ oznacza zbiór ideałów pierwszych R. Dla dowolnego podzbioru $E \subset R$ niech $V(E)$ oznacza zbiór ideałów pierwszych zawierających E. Dla $a \in R$ oznaczamy $V(a) = V(\{a\})$. Sprawdzić, że:

a) $V(E) = V((E))$, gdzie (E) oznacza ideał generowany przez zbiór $E \subset R$.

b) rodzina $\{V(E)\}_{E \subset R}$ spełnia aksjomaty rodziny podzbiorów domkniętych dla pewnej topologii na $Spec\, R$. Topologię tę nazywamy topologią Zariskiego

c) rodzina $\{U_a\}_{a \in R}$, gdzie $U_a = Spec\, R \setminus V(a)$ jest bazą topologii Zariskiego.

d) $U_a \cap U_b = U_{ab}$

e) $U_a = Spec\, R \iff a$ jest elementem odwracalnym

f) $U_a = \emptyset \iff a$ jest elementem nilpotentym

g) z każdego otwartego pokrycia $Spec\, R$ można wybrać pokrycie skończone

h) $Spec\, R$ z topologią Zariskiego jest T_0 przestrzenią.

59 Domknięcie dowolnego punktu $P \in Spec\, R$ w topologii Zariskiego to zbiór ideałów zawierających P. Ideały maksymalne są domkniętymi punktami. (Zbiór ideałów maksymalnych oznaczamy $SpecMax\, R$.)

60 Homomorfizm pierścieni $f : R \longrightarrow R'$ definiuje odwzorowanie ciągłe $f^* : Spec\, R' \longrightarrow Spec\, R$.

61 Opisać odwzorowanie ciągłe $Spec\, \mathbb{C}[x] \to Spec\, \mathbb{R}[x]$ indukowane przez $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

62 Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:

a) $Spec\, R$ jest niespójne

b) $R \cong R_1 \times R_2$, gdzie R_1 i R_2 są pierścieniami niezerowymi.

c) R zawiera element $r \in R$, taki że $r^2 = r$, $r \neq 0$ i $r \neq 1$.

63 Jeżeli R jest pierścieniem lokalnym, to $Spec\, R$ jest spójne.

64 Niech $S \subset R$ będzie systemem multyplikatywnym w R, zaś $\iota : R \longrightarrow S^{-1}R$ homomorfizmem lokalizacji.

a) $\iota^* : Spec\, S^{-1}R \longrightarrow Spec\, R$ jest zanurzeniem homeomorficznym

b) jeżeli $S = \{1, a, a^2, ..\}$ to $\iota^*(Spec\, R_S) = U_a$

c) jeżeli $S = R \setminus I$, gdzie I jest ideałem pierwszym, to $\iota^*(Spec\, R_S) = \bigcap_{I \in U} U$, gdzie U jest otwartym otoczeniem I w $Spec\, R$.

65 Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą Hausdorffa i niech $C(X)$ będzie pierścieniem rzeczywistych funkcji ciągłych na X.

a) pokazać, że dla każdego punktu $x \in X$ ideał $I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ jest maksymalny.

b) (Gelfand) Udowodnić, że przekształcenie $\Phi : X \longrightarrow SpecMax\,(C(X))$, gdzie $\Phi(x) = I_x$ jest homeomorfizmem.

VERTE

Do domu pisemnie na środę 68, 70.

Rozkład prymarny

66 Niech $R = k[x, y, z]$. Czy ideał $I = (zy^2 - x^2, z^2)$ jest prymarny?

67 Niech $R = k[x, y]$, $I = (x^2 + y^2 - 1, (x^2 - 1)y^2)$. Znaleźć rozkład prymarny I.

68 Niech $R = k[x, y, z]/(xy - z^2)$. Pokazać, że $I = (x, z)$ jest pierwszy, ale I^2 nie jest prymarny. Znaleźć rozkład prymarny I^2.

69 Niech $R = k[x, y]$. Podać dwa rozkłady prymarne ideału (x^2, xy).

70 Niech $R = k[x, y, z]$, $P_1 = (x, y)$ $P_2 = (x, z)$, $I = P_1P_2$. Znaleźć rozkład prymarny I.

Rozkład prymarny w pierścieniu wielomianów można znaleźć w programie Sage *(*`http://sage.mimuw.edu.pl/`*). Trzeba napisać np:*

```
R.<x, y> = PolynomialRing(GF(7))
I=(x^2+y^2-1,x)*R;
print I.primary_decomposition()
print
print I.associated_primes()
```

W odpowiedzi dostajemy rozkład prymarny $I = (x^2 + y^2 - 1, x) \subset \mathbb{F}_7[x, y]$ i stowarzyszone ideały pierwsze. Patrz `http://sage.mimuw.edu.pl/home/pub/129`

71 $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \simeq ?$

72 Niech R będzie dowolnym pierścieniem. Niech $A \otimes_R B$ oznacza produkt tensorowy R-algebr (koprodukt w kategorii R-algebr). W szczególności $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$.
– $k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, y_2, \ldots, y_m] \simeq ?$
– $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq ?$.

73 a) Czy naturalne przekształcenie $Spec(A \otimes_{\mathbb{R}} B) \to Spec(A) \times Spec(B)$ musi być przekształceniem ,,na"? b) To samo pytanie dla $SpecMax$. (Rozpatrzeć przykłady z poprzedniego zadania oraz $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.)

74 Czy ideał $(x^2 - yz, z^2)$ jest prymarny? (dokończyć z ćwiczeń).

75 Dany pierścień R. Dla $a \in R$ przez R_a oznaczmy lokalizację R w systemie multiplikatywnym generowanym przez a. Ponadto dla $a|b$ niech $r^a_b : R_a \to R_b$ oznacza naturalny homomorfizm likalizacji. Niech $\{a_i\}_{i \in I} \subset R$ będzie takim zbiorem elementów, że $Spec(R) = \bigcup_{i \in I} U_{a_i}$. Załóżmy, że dany jest zbiór elementów $s_i \in R_{a_i}$ spełniający:

$$r^{a_i}_{a_i a_j}(s_i) = r^{a_j}_{a_i a_j}(s_j) \in R_{a_i a_j}$$

dla każdego $i, j \in I$. Wykazać, że istnieje dokładnie jeden $s \in R$, taki, że

$$r^1_{a_i}(s) = s_i \,.$$

76 Podać prymarny rozkłady ideału (4) w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.