1 $\heartsuit$ Każda grupa rzędu 21 jest cykliczna.

NIE

2 $\spadesuit$ Każda grupa rzędu $245 = 5 \cdot 7^2$ jest przemienna.

TAK: $s_7 = s_5 = 1$, $G \simeq P_7 \times P_5$, $P_5 \simeq \mathbb{Z}_5$, $P_7 \simeq \mathbb{Z}_{49}$ *lub* $\mathbb{Z}_7^2$

3 $\heartsuit$ Niech $f : G \to H$ będzie odwzorowaniem grup abelowych podzielnych.
Wtedy $G \simeq ker(f) \times im(f)$.

NIE. (np $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$*)*

4 $\spadesuit$ Istnieje grupa zawierająca dokładnie 8 elementów rzędu 5.

NIE. G zawiera tylko dwie różne podgrupy izomorficzne z $\mathbb{Z}_5$: $< a >$ i $< b >$. Element aba^{-1} jest rzędu 5. Jeśli $aba^{-1} \in < a >$ to $b \in < a >$. $\lightning$ Jeśli $aba^{-1} \in < b >$, to mamy przekształcenie

$$\mathbb{Z}_5 = < a > \to Aut(< b >) = \mathbb{Z}_4,$$

które musi być trywialne. Więc $aba^{-1} = b$, $< a, b > \simeq \mathbb{Z}_5^2$. $\lightning$

5 $\heartsuit$ Każda grupa rzędu p^3, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest przemienna.

NIE

6 $\spadesuit$ Jeśli każda podgrupa G jest normalna, to G jest przemienna.

NIE. `Kwaterniony`

7 $\heartsuit$ W A_{10} każde dwa elementy rzędu 15 są sprzężone.

TAK

8 $\spadesuit$ Jeżeli $n + m + 1 < k$ i $(n, m) = 1$, to istnieje monomorfizm grupy $\mathbb{Z}_{nm}$ w grupę permutacji parzystych A_k.

TAK. Jeśli m i n są nieparzyste, to posyłamy generator na złożenie rozłącznych cykli długości m i n. Jeśli jedna dna z tych liczb jest parzysta, korygujemy znak dokładając transpozycje elementów nie należących do cykli.

9 $\heartsuit$ Każda grupa rzędu 40 zawiera podgrupę rzędu 5.

TAK

10 ♠ Każda nieabelowa grupa rzędu 40 zawiera element rzędu 4.
NIE. $D_{10} \times \mathbb{Z}_2^2$

11 ♡ Niech grupa G działa na warstwach lewostronnych podgrupy $H < G$, w naturalny sposób. Niech K oznacza jądro tego działania. Wówczas $H < K$.
NIE

12 ♠ Niech $X = G/H$. Grupa ekwiwariantnych automorfizmów zbioru X jest izomorficzna z $G/(\bigcap_{g\in G} gHg^{-1})$.
NIE. Automorfizm $\phi : G/H \to G/H$ jest wyznaczony przez wartość na $[1]$, bo wartość na $[g]$ jest równa $\phi([g]) = g\phi([1])$. Nie każde g_0 zadaje automorfizm. Warunek konieczny i dostateczny to

$$\forall g \in G\ \forall h \in H\ [ghg_0] = [gg_0]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall h \in H\ [hg_0] = [g_0]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall h \in H\ \exists h' \in H\ hg_0 = g_0h'$$

$$\Updownarrow$$

$$g_0 \in N_G(H)$$

Mamy odwzorowanie $\theta : N_G(H) \to Aut(X)$. Przypuśćmy, że $\theta(g_0) = id$, tzn

$$\forall g \in G\ [gg_0] = [g]$$

$$\Updownarrow$$

$$g_0 \in H$$

Czyli $Aut_G(G/H) = N_G(H)/H$. To zupełnie inna grupa niż w pytaniu. Np dla $G = \Sigma_3$, $H =< (12) >$.
PS: Grupa, która wystąpiła w pytaniu to $Im(G \to Aut(G/H)$.

13 ♡ Istnieje grupa skończona G, taka że $[G : Z(G)]$ jest liczbą pierwszą.
NIE

14 ♠ Niech $k(G)$ oznacza liczbę klas sprzężoności elementów grupy G. Jeżeli G jest skończoną grupą nieprzemienną, to $k(G) > |Z(G)| + 1$.
TAK. Przypuśćmy, że poza $Z(G)$ mamy tylko jedną klasę sprzężoności. Stąd grupa ilorazowa $H = G/Z(G)$ ma dokładnie dwie klasy sprzężoności. Nietrywialna orbita działania H przez sprzęganie to $H \setminus \{1\}$. Zatem $|H| - 1$ dzieli $|H|$. Stąd $|H| = 2$. Zatem G jest generowana przez $Z(G)$ i jeden element. Stąd G jest grupą abelową. ↯

15 $\heartsuit$ Niech G będzie dowolną grupą. Jeśli $[G, G] < H$, to $H \lhd G$.
TAK

16 $\spadesuit$ Istnieje nietrywialne działanie (poprzez automorfizmy) grupy A_5 na grupie $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$
NIE. Niech $\phi : A_5 \to Aut(\mathbb{Z}_5^2) = GL_2(\mathbb{Z}_5)$ będzie działaniem. $H = im(\phi) = 1$ lub $H \simeq A_5$ bo A_5 jest prosta. Przypuśćmy, że $H \neq 1$. Mamy $\det : GL_2(\mathbb{Z}_5) \to \mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_4$. Ponieważ $H \simeq A_5$ jest prosta, więc $H \subset ker(\det) = SL_2(\mathbb{Z}_5)$. $|SL_2(\mathbb{Z}_5) = (25-1)(25-5)/4 = 120$, $|H| = 60$. Więc $H \lhd SL_2(\mathbb{Z}_5)$, $SL_2(\mathbb{Z}_5)/H \simeq \mathbb{Z}_2$ jest abelowa, więc $[SL_2(\mathbb{Z}_5), SL_2(\mathbb{Z}_5)] < H$. Ale $[SL_2(\mathbb{Z}_5), SL_2(\mathbb{Z}_5)] = SL_2(\mathbb{Z}_5)$. $\lightning$
(Można też skorzystać z tego, że $PSL_2(\mathbb{Z}_5)$ jest prosta.)

17 $\heartsuit$ Grupa nilpotentna jest rozwiązalna.
TAK

18 $\spadesuit$ Grupa $< x, y | x^3, y^3, xyxy^2 >$ jest nieskończona.
NIE. $xyxy^2 = 1$ i skoro $y^2 = y^{-1}$ dostajemy, $yxy^{-1} = x^{-1}$, czyli grupa $< y >$ działa na $< x >$. Mamy $y^k x y^{-k} = x^{(-1)^k}$. W szczególności dla $k = 3$ (wobec tego, że $y^3 = 1$) mamy $x^{-1} = x$. Ale także $x^3 = 1$, więc $x = 1$. Zatem $G =< y >\simeq \mathbb{Z}_3$ jest skończona.

19 $\heartsuit$ Niech G i H będą skończonymi grupami przemiennymi. Jeżeli dla każdej liczby naturalnej n grupa G ma tyle samo elementów rzędu n, co grupa H, to G i H są izomorficzne.
TAK

20 $\spadesuit$ Niech grupa $SL_2(\mathbb{Z}_{17})$ działa na zbiorze X, $|X| = 18^2$. Działanie musi mieć conajmniej 3 orbity.
NIE. Niech $p = 17$.
Niech B będzie podgrupą Borela (górnotrójkątne macierze) oraz T (macierze diagonalne o wyznaczniku 1).
$|SL_2(\mathbb{Z}_{17})| = (p^2-1)(p^2-p)/(p-1) = (p+1)p(p-1)$, $|B| = p(p-1)$, $|T| = p-1$.
Orbity $|G/B| = p+1$, $|G/T| = (p+1)p$.
Zbiór $X = G/B \sqcup G/T$. $X = (p+1) + (p+1)p = (p+1)^2$.