Każde zdanie oznaczone przez $\boxed{??}$ jest prawdziwe lub fałszywe, proszę odpowiedzieć TAK lub NIE.
Odpowiedzi zadań z ♡ nie wymagają uzasadnienia. W zdaniach z ♠ proszę podać dowody.
Punktacja: za ♡ 2pt lub -1 za złą odpowiedź, za ♠ 5pt

1 ♡ $\boxed{??}$ Załóżmy, że pierścień R jest skończony. Ideał $I \subset R$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalny.

Rozwiązanie. *TAK*

2 ♠ Niech $x, y, z \in \mathbb{Z}$ będą liczbami całkowitymi i niech $NWD(x, y, z) = 1$. Pokazać, że istnieje $a \in \mathbb{Z}$, dla którego $NWD(x + ay, z) = 1$. Z jakich własności pierścienia $\mathbb{Z}$ korzystamy?

Rozwiązanie. *(Zakładamy dodatkowo, że $z \neq 0$.)*
Niech $(x, z) = (u)$. Niech $A = \mathrm{ass}((z))$ będzie zbiorem dzielników pierwszych z, $B = \mathrm{ass}((u))$. Szukamy takiego $a \in \mathbb{Z}$, że

$$x + ay \not\equiv 0 \bmod p \quad \text{dla } p \in A\,.$$

Z twierdzenia chińskiego o resztach istnieje $a \in \mathbb{Z}$, takie, że

$$a \equiv 1 \bmod p \quad \text{dla } p \in B$$

$$a \equiv 0 \bmod q \quad \text{dla } q \in A \setminus B\,.$$

wtedy

$$x + ay \equiv y \not\equiv 0 \bmod p \quad \text{dla } p \in B$$

$$x + ay \equiv x \not\equiv 0 \bmod q \quad \text{dla } q \in A \setminus B$$

■

Korzystamyz tego, że $\mathbb{Z}$ jest DIG.

Inne ciekawe ,,zadanie": (Dirichlet) Jeśli $(x, y) = 1$, to ciąg arytmetyczny $x + ay$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

3 ♡ $\boxed{??}$ Ideał $(7 + \sqrt{5})$ jest maksymal ny w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Rozwiązanie. *NIE*

4 ♠ $\boxed{??}$ Ideał $(6 - i) \subset \mathbb{Z}[i]$ jest pierwszy.

Rozwiązanie. *TAK*

5 ♡ $\boxed{??}$ Z równości $3X^3 + 4X^2 + 3 = (X + 2)^2(3X + 2) = (X + 2)(X + 4)(3X + 1)$ w $\mathbb{Z}_5[X]$ wynika, że $\mathbb{Z}_5[X]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Rozwiązanie. *NIE*

6 ♠ Niech $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[X]$ będzie wielomianem. Pokazać, że: f jest elementem nilpotentnym $\iff$ wszystkie współczynniki a_i są nilpotentne.

Rozwiązanie. *1) a_i nilpotentny $\Rightarrow a_ix^i$ nilpotentny $\Rightarrow \sum a_ix^i$ nilpotentny.*
2) f nilpotentny, przypuśćmy, że a_i nie nilpotentny (i maksymalne możliwe) $\Rightarrow [f] \neq 0 \in (R/\sqrt{0})[x]$ z najwyższym współczynnikiem $[a_i] \neq 0$. Gdyby $f^n = 0$, to $[f]^n = 0$, w szczególności $[a_i^n] = 0$. Sprz.

7 ♡ $\boxed{??}$ Istnieje pierścień bez dzielników zera R oraz ideał $I \subset R$, $I \neq R$, $I \neq 0$ taki, że $I^2 = I$.

Rozwiązanie. *TAK (np wielomiany Puiseux $k[\mathbb{Q}_+] = k[\{x^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}_+}] \supset \mathfrak{m}$)*

8 ♠ Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ będą pierwiastkami równania $x^2 - x + 3 = 0$ oraz

$$R = \{a + b\alpha \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} = \{x + y\sqrt{-11} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-11}) \,|\, x + y \in \mathbb{Z},\ 2y \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Udowodnić, że R z waluacją zadaną przez $v(a+b\alpha) = |(a+b\alpha)(a+b\beta)|$ jest pierścieniem euklidesowym.

Rozwiązanie. *Wystarczy pokazać, że dla $p + q\sqrt{-11} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ istnieją $m, n \in \mathbb{Z}$, takie, że $v((p - m) + (q - n/2)\sqrt{-11}) < 1$. Można tak te liczby dobrać, by $|p - m| < \frac{1}{2}$ i $|q - n/2| < \frac{1}{4}$. Wtedy $v((p - m) + (q - n/2)\sqrt{-11}) \leq \frac{1}{4} + 11\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$*

9 ♡ $\boxed{??}$ Dany homomorfizm pierścieni $f : R_1 \to R_2$. Jeśli indukowane przekształcenie spektrów $f^* : Spec(R_2) \to Spec(R_1)$ jest różnowartościowe, to f jest epimorfizmem.

Rozwiązanie. *NIE*

10 ♠ Niech P będzie ideałem pierwszym. Pokazać, że jeżeli Q jest ideałem P-prymarnym, to dla $b \notin P$ mamy $(Q : b) = Q$.

Rozwiązanie. *Oczywiście $Q \subset (Q : b)$. Jeśli $a \in (Q : b)$ i $a \notin Q$, to istnieje n, że $b^n \in Q$, czyli $b \in \sqrt{Q} = P$.*

11 ♡ $\boxed{??}$ Niech k będzie ciałem. Ideał $(x^2 - y, y^2 - x) \subset k[x, y]$ jest prymarny.

Rozwiązanie. *NIE (zbiór zer tego ideału jest niespójny, (x, y) i $(x - 1, y - 1)$ pojawią się w rozkładzie prymarnym.*

12 ♠ $\boxed{??}$ Ciało ułamków $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ jest izomorficzne z $\mathbb{Q}(t)$.

Rozwiązanie. *NIE. W $(\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 + Y^2))$ równanie $T^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie $T = \frac{X}{Y}$. Natomiast gdyby w $\mathbb{Q}(t)$ to równanie miało rozwiązania, to miałoby też rozwiązanie w $\mathbb{R}$ (bo $\mathbb{Q}(t)$ można włożyć w $\mathbb{R}$: $x \mapsto e$.) A jak wiemy w $\mathbb{R}$ to równanie nie ma rozwiązania.*