Każde zdanie oznaczone przez $\boxed{\textbf{??}}$ jest prawdziwe lub fałszywe, proszę odpowiedzieć TAK lub NIE.
Odpowiedzi zadań z ♡ nie wymagają uzasadnienia. W zdaniach z ♠ proszę podać dowody.
Punktacja: za ♡ 2pt lub −1 za złą odpowiedź, za ♠ 5pt

1 ♡ $\boxed{\textbf{??}}$ Załóżmy, że pierścień R jest skończony. Ideał $I \subset R$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalny.

2 ♠ Niech $x, y, z \in \mathbb{Z}$ będą liczbami całkowitymi i niech $NWD(x, y, z) = 1$. Pokazać, że istnieje $a \in \mathbb{Z}$, dla którego $NWD(x + ay, z) = 1$. Z jakich własności pierścienia $\mathbb{Z}$ korzystamy?

3 ♡ $\boxed{\textbf{??}}$ Ideał $(7 + \sqrt{5})$ jest maksymalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

4 ♠ $\boxed{\textbf{??}}$ Ideał $(6 - i) \subset \mathbb{Z}[i]$ jest pierwszy.

5 $\heartsuit$ $\boxed{??}$ Z równości $3X^3 + 4X^2 + 3 = (X+2)^2(3X+2) = (X+2)(X+4)(3X+1)$ w $\mathbb{Z}_5[X]$ wynika, że $\mathbb{Z}_5[X]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

6 $\spadesuit$ Niech $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in R[X]$ będzie wielomianem. Pokazać, że: f jest elementem nilpotentnym $\iff$ wszystkie współczynniki a_i są nilpotentne.

7 $\heartsuit$ $\boxed{??}$ Istnieje pierścień bez dzielników zera R oraz ideał $I \subset R$, $I \neq R$, $I \neq 0$ taki, że $I^2 = I$.

8 $\spadesuit$ Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ będą pierwiastkami równania $x^2 - x + 3 = 0$ oraz

$$R = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \{x + y\sqrt{-11} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-11}) \mid x + y \in \mathbb{Z},\ 2y \in \mathbb{Z}\}.$$

Udowodnić, że R z waluacją zadaną przez $v(a+b\alpha) = |(a+b\alpha)(a+b\beta)|$ jest pierścieniem euklidesowym.

9 $\heartsuit$ $\boxed{??}$ Dany homomorfizm pierścieni $f : R_1 \to R_2$. Jeśli indukowane przekształcenie spektrów $f^* : Spec(R_2) \to Spec(R_1)$ jest różnowartościowe, to f jest epimorfizmem.

10 $\spadesuit$ Niech P będzie ideałem pierwszym. Pokazać, że jeżeli Q jest ideałem P-prymarnym, to dla $b \notin P$ mamy $(Q : b) = Q$.

11 $\heartsuit$ $\boxed{??}$ Niech k będzie ciałem. Ideał $(x^2 - y, y^2 - x) \subset k[x, y]$ jest prymarny.

12 $\spadesuit$ $\boxed{??}$ Ciało ułamków $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ jest izomorficzne z $\mathbb{Q}(t)$.