Każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe. Proszę odpowiedzieć TAK lub NIE na zdania z ♡ oraz uzasadnić w odpowiedzi w zdaniach ♠. Punktacja: za ♡ 2pt lub -1 za złą odpowiedź, za ♠ 5pt

1 ♡ Niech G będzie skończoną grupą abelową. Załóżmy, że dla każdej liczby pierwszej p i dla każdej liczby naturalnej n grupa G zawiera co najwyżej jedną podgrupę rzędu p^n. Wówczas grupa G jest cykliczna.

2 ♠ Istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do izomorfizmu) grupa rzędu 255.

3 ♡ Jeżeli $[G : H] = 2$ i $K \lhd H$, to $K \lhd G$.

4 ♠ Niech G będzie skończoną p-grupą. Jeżeli G zawiera dokładnie $p - 1$ elementów rzędu p, to G jest cykliczna.

5 ♡ Jeżeli grupa G (niekoniecznie skończona) nie zawiera podgrupy izomorficznej z $Z_p \times Z_p$ (gdzie p jest liczbą pierwszą), to każde dwie podgrupy grupy G, izomorficzne z Z_p, są sprzężone.

6 ♠ Dla każdej liczby pierwszej p istnieje nieprzemienna grupa G rzędu p^3.

7 ♡ 2-podgrupa Sylowa grupy alternującej A_5 jest izomorficzna z $Z_2 \times Z_2$.

8 ♠ 2-podgrupa Sylowa grupy permutacji Σ_5 jest izomorficzna z Q_8.

9 ♡ Jżeli $n + m < k$, to istnieje monomorfizm grupy Z_{nm} w grupę Σ_k.

10 ♠ Niech G będzie grupą. Jeżeli $H_1, H_2 \leq G$ i $H_1 \neq H_2$, to dla dowolnych dwóch elementów $g_1, g_2 \in G$ grupy G zachodzi $g_1H_1 \neq g_2H_2$.

11 ♡ W grupie permutacji Σ_n każde dwa elementy rzędu n są sprzężone.

12 ♠ Jeżeli każda podgrupa Sylowa grupy G jest normalna w G, to G jest produktem swoich podgrup Sylowa.

13 $\heartsuit$ Jeżeli grupa G jest nieprzemienna, to $G/Z(G)$ jest nieprzemienna.

14 $\spadesuit$ Istnieje działanie grupy $SL_2(\mathbb{Z}_6)$ (macierze o wyrazach w $\mathbb{Z}_6$ o wyznaczniku 1) na zbiorze siedmioelementowym bez punktów stałych.

15 $\heartsuit$ W grupie Σ_{11} każde dwa elementy rzędu 15 są sprzężone.

16 $\spadesuit$ W grupie A_4 nie ma podgrupy rzedu 6.

17 $\heartsuit$ Każda grupa skończenie generowana ma wzrost conajwyżej wykładniczy.

18 $\spadesuit$ Grupa $< x, y | x^3, y^3, xyx^2y^2 >$ jest przemienna i skończona.

19 $\heartsuit$ Grupa skończona G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej podgrupa nietrywialna posiada nietrywialną właściwą podgrupę normalną.

20 $\spadesuit$ Niech $G = N \rtimes H$ gdzie N jest grupą nilpotentną, H abelową. Wtedy G jest nilpotentna.