Zadania o grupach

18.11.2014

Zadania zawierają odsyłacze do podręczników

[BT] A. Bojanowska, P. Traczyk, Algebra I (skrypt) http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaboj/algebra/algfinv1.pdf

[Br] J. Browkin, Teoria cia, Bibl.Mat.49, PWN, Warszawa 1977

[KM] M. Kargapolov, J. Merzljakov, Podstawy teorii grup, PWN, Warszawa 1976.

[BJ] M. Bryński, J. Jurkiewicz, Zbiór zadań z algebry, PWN, Warszawa

1 Obliczyć rzędy grup izometrii brył platońskich

2 Obliczyć rząd grupy przekształceń kostki Rubika

3 Czy istnieje skończony układ generatorów grupy $\mathbb{Q}_+$?

4 Sprawdzić, że $SL_2(\mathbb{Z})$ jest generowana przez macierze $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Niech G_1 i G_2 będą podgrupami pewnej ustalonej grupy. Udowodnić $|G_1 \cdot G_2| \cdot |G_1 \cap G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$. Uawaga: zbiór $G_1 \cdot G_2 = \{g_1 g_2 \,:\, g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$ nie musi być grupą.

6 Udowodnoć, że $\mathbb{Q}_+$ nie zawiera podgrupy skończonego indeksu > 1.

7 Znaleźć $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$, $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$ i $|Sp_n(\mathbb{F}_q)|$, gdzie $\mathbb{F}_q$ jest ciałem q-elementowym, a grupa $Sp_n(\mathbb{F}_q)$ oznacza grupę macierzy $2n \times 2n$ spełniających warunek $A^T J A = J$, a J jest macierzą blokową $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

8 (pis) Centrum grupy to $Z(G) = \{g \in G \,:\, \forall h \in G\ gh = hg\}$. Znależć $Z(GL_n(\mathbb{F}))$ i $Z(SL_n(\mathbb{F}))$.

9 (pis) Niech $\phi(n)$ = ilość liczb naturalnych względnie pierwszych z n i mniejszych od n (funkcja Möbiusa). Udowodnić, że dla każdej liczby a względnie pierwszej z n mamy $a^{\phi(n)} \equiv 1\ mod\ n$. To jest tw Eulera, udowodnić je z tw Lagrange'a.

---

10 Niech $(G, +, 0)$ będzie grupą przemienną. Mówimy, że G jest podzielna, jeśli

$$\forall g \in G \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists h \in G\ nh = g.$$

Wykazać, że grupa podzienlna nie ma właściwych podgrup skończonego indeksu.

11 a) Niech $G \subset \mathbb{Q}$ będzie zbiorem ułamków, które w postaci nieskracalnej mają mianowniki będące potęgą liczby p. (Oznaczenie $\mathbb{Z}[1/p]$.) Czy $\mathbb{Z}[1/p]$ ma podgrupę skończonego indeksu?
b) Niech $G \subset \mathbb{Q}$ będzie zbiorem ułamków, które w postaci nieskracalnej mają mianowniki względnie pierwsze z liczbą p. (Oznaczenie $\mathbb{Z}_{(p)}$.) Czy $\mathbb{Z}_{(p)}$ ma podgrupę skończonego indeksu?

Następne dwa zadania to przykłady grup Coxetera, będziemy je robić w drugiej kolejności

12 Niech $G \subset GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ będzie podgrupą generowaną przez permutacje współrzędnych i macierze diagonalne $Diag(t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_n})$, $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Wykazać, że istnieje układ generatorów $s_0, s_1, \ldots s_{n-1}$, spełniający
$s_i^2 = 1$,
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $i - j \not\equiv \pm 1\ mod\ n$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$ ($i + 1$ rozumiane modulo n).

13 Niech $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$ będzie podgrupą generowaną przez permutacje współrzędnych i macierze diagonalne $D = Diag(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, $det(D) = 1$. Wykazać, że istnieje układ generatorów $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s'_{n-1}$, spełniający
$s_i^2 = 1$, ${s'}_{n-1}^{2} = 1$
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $|i-j| \neq 1$,
$s_i s'_{n-1} = s'_{n-1} s_i$ dla $i \neq n-2$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$, $(s_{n-2} s'_{n-1})^3 = 1$

14 (pis) Wykazać, że grupa wolna o 2 generatorach zawiera grupę wolną o przeliczalnie wielu generatorach.

15 Niech A będzie grupą przemienną, $H \subset Aut(A)$. Niech grupa G będzie podgrupą permutacji zbioru A generowaną, przez H i przekształcenia Tr_a dla $a \in A$ (definiujemy $Tr_a(b) = a + b$). Wykazać, że jako zbiory $G = H \times A$. Opisać działanie w G.

16 Wykazać, że istnieje epimorfizm $GL_2(\mathbb{F}_3) \to \Sigma_4$ z jądrem $\{I, -I\}$. (tzn $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \Sigma_4$).

17 Czy grupa izometrii sześcianu zachowujących orientację $O_{48} \cap SO(3)$ jest izomorficzna z Σ_4?

18 Znaleźć epimorfizm $\Sigma_4 \to \Sigma_3$.

19 Każda podgrupa indeksu 2 jest podgrupą normalną.

20 $H < G$, $N \lhd G$ to $(NH)/N \simeq H/(N \cap H)$

21 (pis) Jesli G nieprzemienna, to G podzielona przez centrum $G/Z(G)$ nie jest cykliczna.

22 * Grupa automorfizmow grupy nieprzemiennej nie jest cykliczna. (Wsk: z poprzedniego zadania.)

23 Wykazać że jeśli liczba pierwsza p dzieli rząd grupy, to istnieje element rzędu p.

24 Przecięcie skończonej liczby podgrup normalnych skończonego indeksu ma skończony indeks.

25 Niech H i K będą dwiema podgrupami normalnymi w G, $H \cap K = \{1\}$. Udowodnić, że każdy element z H jest przemienny z każdym elementem w K.

26 Podać klasyfikację grup rzędu ≤ 10

27 Znaleźć wszystkie podgrupy normalne grupy $O(3)$ macierzy 3×3 spełniających $A^T A = I$.

28 * Znaleźć wszystkie podgrupy skończone grupy $O(3)$ macierzy 3×3 spełniających $A^T A = I$.

29 Każdy element komutanta może być przedstawiony w postaci $a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$

30 Cykle długości 3 generują A_n

31 Opisać klasy sprzężoności elementów w Σ_5 i w A_5.

32 Czy $Inn(\Sigma_n) = Aut(\Sigma_n)$ dla $n = 2, 3, 4, 5$? Uwaga: wyjątkowo $Inn(\Sigma_6) \neq Aut(\Sigma_6)$.
(Wiki: Automorphisms of the symmetric and alternating groups oraz [KM], str. 30, gdzie omawia się własność $G \xrightarrow{\simeq} Aut(G)$ *niesłusznie nazwaną doskonałością. Dla nas grupa doskonała, to taka, że* $G = [G, G]$*.)*

33 (pis) Jeśli $|G| = pq$ (p i q liczby pierwsze),
a) to G nie jest prosta,
b) G jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_q$.

34 (pis) $H/(N \cap H) \simeq (H \cdot N)/N$

35 (pis) $Inn(G) \lhd Aut(G)$

36 (pis) $Ab(GL_n(\mathbb{K})) =?$

37 p liczba pierwsza. Wykazać, że dowolna grupa rzędu p^k ma nietrywialne centrum.

38 p liczba pierwsza. $|G| = p^k$, $\{1\} \neq N \lhd G$ to $N \cap Z(G) \neq \{1\}$

39 * Jeśli $|G| = pqr$ (p, q i r liczby pierwsze), pokazać, że G nie jest prosta.

40 p liczba pierwsza. Pokazać, że Σ_p jest generowana przez dowolny cykl długości p i dowolną transpozycję.

41 (pis) Niech $H < K < G$ oraz $H \lhd G$. Wykazać $H \lhd K$ i $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$ jako zbiory. Jeśli ponadto $K/H \lhd G/H$ to $K \lhd G$ oraz $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$ jako grupy.

42 (pis) a) Wskazać dwie nieizomorficzne nieprzemienne grupy rzędu 125. b) Czy istnieje jeszcze trzecia grupa nieprzemienna, która jest nieizomorficzna ze wskazanymi w punkcie a)?

43 (pis) a) Wskazać podgrupę rzędu 5^6 w Σ_{25}. b) Niech p będzie liczbą pierwszą, $n \in \mathbb{N}$. Wskazać p-podgrupę Sylowa w Σ_n.

44 * Niech $H < G$ będzie właściwą podgrupą skończonego indeksu. Wykazać, że $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

45 Udowodnić

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^{\langle g \rangle}|.$$

46 Niech H będzie grupą prostą, $H \lhd G$, $|H|^2$ nie dzieli $|G|$. Udowodnić, że H jest jedyną podgrupą izomorficzną z H podgrupą G.

47 Niech $G = [G, G]$ grupa doskonała, $K \lhd G$ cykliczna podgrupa normalna. Pokazać, że $K < Z(G)$.

48 Niech $A_n < A$ będą podgrupami grupy abelowej oraz $\left\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\rangle = A$. Załóżmy, że

$$\forall_n \; A_n \cap \left(\bigoplus_{k<n} A_k \right) = 0.$$

Wykazać, że $A \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, tzn dla dowolnej rodziny homomorfizmów $f_n : A_n \to B$ istnieje przekształcenie $f : A \to B$ takie, że $f_{|A_n} = f_n$. (Uwaga: $\mathbb{N}$ można zastąpć zbiorem dowolnym indeksów, podać odpowiebnie sformułowanie tezy).

49 Funkcja $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ jest homomorfizmem wtady i tylko wtedy gdy G jest przemienna.

50 Dla $f, g \in Hom(G, H)$ określamy $f \bullet g : G \to H$, $(f \bullet g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Wykazać, że gdy H jest abelowa, to $f \bullet g$ jest homomorfizmem.

51 Niech A, B, C, D będą grupami abelowymi. Mówimy, że ciąg homomorfizmów $A \to B \to C$ jest dokładny w miejscu B, gdy $im(A \to B) = ker(B \to C)$. Załóżmy, że $0 \to A \to B \to C \to 0$ jest dokładny w miejscach A, B i C. W którym z miejsc jest dokładny oczywisty ciąg $0 \to Hom(D, A) \to Hom(D, B) \to Hom(D, C) \to 0$?

52 Założenia tjw. W którym z miejsc jest dokładny oczywisty ciąg $0 \to Hom(C, D) \to Hom(B, D) \to Hom(A, D) \to 0$?

53 Założenia tjw oraz załóżmy dodadkowo A jest podzielna. W którym z miejsc jest dokładny oczywisty ciąg $0 \to Hom(D, A) \to Hom(D, B) \to Hom(D, C) \to 0$?

54 Podać przykład grupy abelowej beztorsyjnej A takiej, że istnieje epimorfizm $p : B \twoheadrightarrow A$ z grupy abelowej B nie mający przekroju (tzn nie istnieje $s : A \to B$ spełniającego $p \circ s = id_A$).

55 Niech A, B, C będą grupami przemiennymi. Załóżmy, że $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ jest dokładny w miejscach A, B i C. Wykazać, że gdy istnieje $h : B \to A$, takie $h \circ f = id_A$, to $B \simeq A \oplus C$. Czy wynikanie w odwrotną stronę jest prawdziwe? Analogicznie rozważyć warunek: istnieje $k : C \to B$ taki, że $g \circ k = id_C$.

56 (pis) Dana grupa abelowa $A = \mathbb{Z}^n / im(\phi)$, gdzie $\phi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ jest zadane wzorem

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i, \sum_{i=1}^{m} i\, a_i, \sum_{i=1}^{m} i^2 a_i, \ldots \sum_{i=1}^{m} i^{n-1} a_i \right).$$

Przedstawić A w postaci produktu grup cyklicznych.

57 (pis) Czy każda grupa rzędu 595 jest cykliczna?

58 (pis) Dla jakiego n istnieje grupa prosta rzędu $3^n \cdot 7$?

59 Niech grupa G działa na grupę H przez automorfizmy. Podać wzór na centrum $H \rtimes G$ wyrażony za pomocą niezmienników G, H i działania.

60 Czy $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$?

61 Udowodnić, że grupa Σ_n ma przedstawienie:
generatory: transpozycje $s_i = (i, i+1)$ dla $i = 1, s, \ldots, n-1$
relacje:
$s_i^2 = 1$,
$s_i s_j = s_j s_i$ dla $|i - j| \neq 1$,
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$

VERTE

We czwartek o g 15 jest kolokwium. Zamiast ćwiczeń rano zrobimy konsultacje: jeśli ktoś będzie miał pytanie, to postaram się odpowiedzieć. Możemy też robić zadania 64, 67, 68, 69, 72, 73

62 Podgrupa grupy nilpotentnej jest nilpotentna.

63 Iloraz grupy nilpotentnej jest grupą nilpotentną.

64 * W grupie nilpotentnej G, zbiór elementów torsyjnych tworzy podgrupę. (Ewentualnie patrz [KM])

65 Niech G będzie grupą generowaną przez skończony zbiór A. Przez $|g|$ oznaczamy długość najkrótszego słowa reprezentującego g. Definiujemy $d(g,h) = |gh^{-1}|$. Udowodnić, że d jest metryką (odległością), w szczególności spełnia nierówność trójkąta.

66 Grupa Heisenberga $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma wzrost $\sim r^4$.

67 * Grupy nilpotentne mają wzrost wielomianowy.

68 * $SL_2(\mathbb{Z})$ ma wzrost wykładniczy.

69 * Niech $A = E_{1,2}(1) \in SL_2(\mathbb{Z})$ będzie macierzą elementarną. Udowodnić, że grupa generowana przez A i A^T jest wolna.

70 Niech $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ będzie kratą, tzn Λ jako podgrupa grupy $\mathbb{R}^n$ jest generowana przez wektory stanowiące bazę $\mathbb{R}^n$. Udowodnić, że $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$. (*to chyba bardzo łatwe*)

71 Niech $G \subset O(n)$ będzie skończoną podgrupą grupy izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że:
(1) G zachowuje pewną kratę $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$
(2) G jest generowana przez odbicia (tzn symetrie prostopadłe) s_v wzgędem hiperpłaszczyzn $H_v = v^\perp$ dla $v \in A \subset \Lambda$.

Wykazać, że element $s_v s_w$ dla $v, w \in A$ może być rzędu 1, 2, 3, 4 lub 6.

72 (Rozkład Bruhata) Niech $B \subset GL_n(\mathbb{K})$ oznacza grupę macierzy górnotrójkątnych. Dla $w \in \Sigma_n$ niech a_w oznacza macierz permutacji. Udowodnić, że $GL_n(\mathbb{K})$ jest sumą rozłączną zbiorów

$$X_w = B \cdot a_w \cdot B = \{b_1 \cdot a_w \cdot b_2 \mid b_1, b_2 \in B\}$$

gdzie w przebiega Σ_n

73 Znaleźć normalizator grupy macierzy górnotrójkątnych $B \subset GL_n(\mathbb{F})$.