Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Bartosz Wcisło
Nr albumu: 276697

Klasyfikacja przestrzeni soczewkowych

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Agnieszki Bojanowskiej-Jackowskiej

Lipiec 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiam podstawowe wiadomości dotyczące przestrzeni soczewkowych. Zostaje opisany ich $\mathbb{Z}_m$-CW-rozkład. Przedstawia się obliczenie ich grup homologii oraz klasyfikację z dokładnością do typu homotopijnego oraz homeomorfizmu (bez dowodu). Ponadto przedstawiam najważniejsze własności GCW-kompleksów.

Słowa kluczowe

przestrzeń soczewkowa, GCW-kompleks, G-przestrzeń, przestrzeń orbit, homotopijna równoważność

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

57-02 Manifolds and cell complexes

Tytuł pracy w języku angielskim

Clasification of lens spaces

Spis treści

Wstęp

Niniejsza praca dotyczy przestrzeni soczewkowych. Te przestrzenie topologiczne stały się znane jako przykład rozmaitości o izomorficznych grupach homologii, lecz o różnym typie homotopijnym oraz o tym samym typie homotopijnym, lecz nie homeomorficznych. Wyniki niniejszej pracy pochodzą głównie z [Cohen] oraz [Hatcher]. Praca składa się z trzech części. W pierwszej wprowadza się podstawowe pojęcia i definicje dotyczące CW-kompleksów i G-przestrzeni. Udowodnione zostają też najważniejsze fakty dotyczące przekształceń określonych na przestrzeniach orbit i ich własności podnoszenia. Druga opisuje $\mathbb{Z}_m$-CW-strukturę przestrzeni soczewkowych i przedstawia obliczenie ich grup homologii. Trzecia przedstawia klasyfikację tych przestrzeni z dokładnością do typu homotopijnego. W tym celu wykazane zostają główne własności przekształceń sfer S^{2n-1} ekwiwariantnych względem badanego działania grupy $\mathbb{Z}_m$. Nie przeprowadza się natomiast klasyfikacji przestrzeni soczewkowych z dokładnością do homeomorfizmu, a jedynie cytuje się ten klasyczny wynik.

Rozdział 1

GCW-kompleksy

Rozpocznijmy od bardzo ogólnych faktów i wprowadźmy pojęcia, które posłużą do badania przestrzeni soczewkowych. Definicje i fakty zawarte w tym rozdziale pochodzą głównie z prac [Hatcher] oraz [TomDieck].

Definicja 1.0.1. ***CW-kompleksem*** *nazywamy przestrzeń topologiczną X z wyróżnionym ciągiem podprzestrzeni*

$$\dots X^{(j)} \supseteq \dots \supseteq X^{(1)} \supseteq X^0$$

oraz rodziną przekształceń $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ taką, że

1. *$X^{(0)}$ to przestrzeń dyskretna.*
2. *$\phi_j : \amalg_{\alpha \in \Lambda_j} S_\alpha^{j-1} \to X^{j-1}$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$.*
3. *$X^{(j)} \simeq X^{(j-1)} \cup_{\phi_j} \amalg_{\alpha \in \Lambda_j} D_\alpha^j$.*
4. *Dowolny zbiór U jest otwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \cap X^{(n)}$ jest otwarty w $X^{(n)}$ dla dowolnego n.*

$X^{(j)}$ z powyższej definicji nazywa się j-tym szkieletem. Homeomorfizm wymieniony w punkcie trzecim będziemy oznaczać Φ_j. Dla $\alpha \in \Lambda_j$ obraz $\Phi_j[D_\alpha^j]$ nazywamy j-tą komórką. Obcięcia odwzorowań $\Phi_{j|D_\alpha^{j-1}}$ oraz $\phi_{j|S_\alpha^{j-1}}$ określamy odpowiednio odwzorowaniami charakterystycznym i doklejającym tej komórki.

Powyższa definicja ma bardzo jasny sens geometryczny. Można by się spodziewać, że niektóre przestrzenie topologiczne dadzą się przedstawić jako suma dysków połączonych tylko brzegami. Byłaby to struktura w pewnym sensie podobna do triangulacji. Tej intuicji stara się uczynić zadość pojęcie CW-kompleksu. W naturalny sposób łączy się z nim pojęcie przekształcenia komórkowego.

Definicja 1.0.2. *Niech X, Y będą CW-kompleksami. Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Powiemy, że f jest* ***przekształceniem komórkowym*** *jeżeli dla dowolnego i $f[X^{(i)}] \subseteq Y^{(i)}$.*

Do zdefiniowania kompleksu łańcuchowego potrzebne będzie pojęcie stopnia przekształcenia. Zadamy je przez aksjomaty.

Definicja 1.0.3. *Niech $f : S^j \to S^j$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech $j > 1$.* Stopniem *odwzorowania nazwiemy przekształcenie*

$$f \longmapsto \deg f$$

o następujących własnościach:

1. *Jeśli $f \sim g$, to $\deg f = \deg g$.*
2. $\deg fg = \deg f \deg g$.
3. *Przekształcenie*

   $$(\cos\vartheta(cos\phi, \sin\phi, \bar{0}) + \sin\vartheta(0,0,v)) \longmapsto (\cos\vartheta(\cos d\phi, \sin d\phi, \bar{0}) + \sin\vartheta(0,0,v)),$$

   gdzie $d \in \mathbb{Z}$, $\quad |v| = 1$ ma stopień d.

Struktura CW-kompleksu pozwala na przypisanie przestrzeni topologicznej kompleksu łańcuchowego. Ustalmy dla każdego n homeomorfizm $h : D^n/S^{n-1} \to S^n$.

Definicja 1.0.4. *Niech X będzie CW-kompleksem. Jego kompleksem łańcuchowym nazwiemy kompleks $C_*(X)$:*

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\partial} 0, \tag{1.1}$$

gdzie $C_n(X)$ to grupa wolna abelowa generowana przez n-te komórki CW-kompleksu X, a przekształcenie brzegowe $\partial : C_{n+1}(X) \to C_n(X)$ jest określone następująco: niech $\alpha \in \Lambda^{j+1}(X)$. Rozważmy następujący ciąg przekształceń:

$$S^j_\alpha \xrightarrow{\phi_{j+1|S^j_\alpha}} X^{(j)} \xrightarrow{q} X^{(j)}/X^{(j-1)} \simeq_h \bigvee\nolimits_{\beta\in^j(Y)} S^j_\beta, \tag{1.2}$$

gdzie h - ustalony homeomorfizm taki, że $hq[D^{j-1}_\beta] = S^{j-1}_\beta$. Złożenie wszystkich wyżej wymienionych przekształceń jest ciągłym odwzorowaniem ze sfery w sferę, a zatem ma dobrze określony stopień. Oznaczmy ten stopień $n_{\alpha,\beta}$. W końcu niech ∂ będzie jedynym takim homomorfizmem, że

$$\partial\langle\alpha\rangle = \sum_{\beta\in\Lambda^j(Y)} n_{\alpha,\beta}\langle\beta\rangle.$$

Powyższa definicja jest funktorialna.

Definicja 1.0.5. *Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem komórkowym CW-kompleksów. Wówczas przekształcenie indukowane $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ jest zdefiniowane przez*

$$f_*\langle\alpha\rangle = \sum_{\beta\in\Lambda^j(Y)} n_{\alpha\beta}\langle\beta\rangle,$$

gdzie $n_{\alpha\beta}$ jest stopniem złożenia przekształcenia

$$S^j_\alpha \simeq D^j_\alpha/S^{j-1}_\alpha \longrightarrow X^{(j)}/X^{(j-1)} \xrightarrow{f} Y^j/Y^{j-1} \simeq \bigvee\nolimits_{\beta\in\Lambda^j(Y)} S^j_\beta \longrightarrow S^j_\beta, \tag{1.3}$$

gdzie pierwsze odwzorowanie to przekształcenie ilorazowe. Stopień jest dobrze określony,bo f jako przekształcenie komórkowe przeprowadza $X^{(n)}$ w $Y^{(n)}$.

Niestety nie widać bezpośrednio, czemu homologie w wyżej określonym sensie mają być identyczne z homologiami singularnymi przestrzeni. Właściwie nie widać nawet, czemu by homologie CW-kompleksów miały być niezmiennicze względem homeomorfizmów ani nawet - czy są niezależne od wyboru konkretnych przekształceń charakterystycznych w definicji CW-struktury na rozmaitości. Niemniej zachodzi następujący

Fakt 1.0.1. *Jeżeli przestrzeń X jest CW-kompleksem, to jej grupy homologii singularnych są identyczne z grupami homologii zdefiniowanymi wyżej. W szczególności zdefiniowane wyżej homologie są niezmiennikiem homotopijnej równoważności.*

Uwaga 1.0.1. *Dla dowolnych kompleksów łańcuchowych X, Y takich, że $X = X^{(n)}, Y = Y^{(n)}$, jeżeli*

$$H_n(X) \simeq H_n(Y) \simeq \mathbb{Z}$$

,to dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f : X \to Y$ przekształcenie indukowane na homologiach ma postać

$$\alpha \longmapsto n\alpha$$

i można zdefiniować stopień przekształcenia wzorem

$$\deg f = n.$$

Tak zdefiniowany stopień przekształcenia spełnia pierwsze dwie własności stopnia odwzorowania sfer.

Przejdziemy do rozważania przestrzeni z działaniami grup. Rozważymy przestrzeń $\tilde{X}/G$ z topologią ilorazową. W poniższych wywodach będziemy przez ρ, ρ' oznaczać działania grupy G na $\tilde{X}$, a przez X, X' odpowiednie przestrzenie ilorazowe.

Odnotujmy na początek następujący

Fakt 1.0.2. *Niech $\tilde{X}$ będzie CW -kompleksem i niech G działa na $\tilde{X}$. Wówczas $X = \tilde{X}/G$ ma strukturę CW-kompleksu z odwzorowaniami charakterystycznymi $q \circ \Phi_\alpha$ dla Φ_α odwzorowań charakterystycznych komórek kompleksu $\tilde{X}$ oraz przekształcenia ilorazowego $q : \tilde{X} \to X$.*

Fakt 1.0.3. *Niech G będzie grupą dyskretną, która działa w sposób wolny i ciągły na $\tilde{X}$. Wówczas przekształcenie ilorazowe $q : \tilde{X} \to \tilde{X}/G = X$ jest nakryciem.*

Definicja 1.0.6. *Niech X, X' będą G-przestrzeniami, niech G działa na X działaniem ρ oraz na X' działaniem ρ' w sposób wolny. Niech $f : X \to X'$ będzie odwzorowaniem komórkowym. Powiemy, że f jest (ρ, ρ')-ekwiwariantne, jeśli dla dowolnego $g \in G$*

$$f \circ \rho_g = \rho'_g \circ f.$$

Jeśli zaś istnieje homotopia $H : X \times I \to X'$ łącząca f z f' taka, że

$$H(\cdot, t) \circ \rho_g = \rho'_g \circ H(\cdot, t)$$

dla każdego $t \in I$, to f i f' są ekwiwariantnie homotopijne. Przekształcenie H nazwiemy wówczas ekwiwariantną homotopią.

Poniższe stwierdzenie motywuje rozważanie ekwiwariantnych przekształceń przestrzeni z działaniem grupy G.

Stwierdzenie 1.0.1. *Niech $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ będzie ciągłym odwzorowaniem (ρ, ρ')-ekwiwariantnym, a $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}'$ ekwiwariantną homotopią łączącą $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$. Istnieją wówczas ciągłe przekształcenie $f : X \to X'$ oraz homotopia $H : X \times I \to X'$ indukowane na przestrzeniach orbit przy działaniu grupy G przez $\tilde{f}$ oraz $\tilde{H}$.*

Dowód. Jeśli $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ jest (ρ, ρ')-ekwiwariantne, to definiujemy $f : X \to X'$ przez:

$$f([x]) = [\tilde{f}(x)].$$

Przekształcenie jest dobrze zdefiniowane (poniekąd właśnie to oznacza ekwiwariancja przekształcenia $\tilde{f}$), bo jeśli $x' \in [x]$, to mamy $x' = \rho_g(x)$ dla pewnego $g \in G$ Czyli

$$\begin{aligned} f([x']) &= f([\rho_g(x)]) \\ &= [\tilde{f} \circ \rho_g x))] \\ &= [\rho'_h \circ \tilde{f}(x)] \\ &= [\tilde{f}(x)]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Załóżmy teraz, że $\tilde{H}$ jest ekwiwariantną homotopią łączącą $\tilde{f}$ z $\tilde{g}$. Definiujemy jak poprzednio:

$$H([x], t) = [H(x, t)].$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że $H(\cdot, t)$ jest dla dowolnego $t \in I$ dobrze określonym odwzorowaniem. Jest też ciągłe, bo $\tilde{H}$ jest ciągłe, mamy zaś:

$$H \circ (q \times id_I) = q' \circ \tilde{H},$$

gdzie $q : \tilde{X} \to X \quad q' : \tilde{X} \to X'$ to przekształcenia ilorazowe, a zatem w szczególności przekształcenia otwarte.

□

Po tych przygotowaniach możemy podać główną definicję tego rozdziału.

Definicja 1.0.7. *G-przestrzeń X nazwiemy* ***GCW-kompleksem*** *jeśli istnieje wyróżniony ciąg G-podprzestrzeni*

$$\ldots X^{(j)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(1)} \supseteq X^0$$

oraz rodzina odwzorowań $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^j(X)}$ i podgrup normalnych $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \bigcup_j \Lambda^j}$ grupy G takie, że

1. *$X^{(0)}$ to przestrzeń dyskretna.*
2. *$\phi_j : \amalg_{\alpha \in \Lambda_j} S^{j-1} \times G/H_\alpha \to X^{j-1}$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$.*
3. *$X^{(j)} \simeq X^{(j-1)} \cup_{\phi_j} \amalg_{\alpha \in \Lambda_j} D^j \times G/H_\alpha$.*
4. *Dowolny zbiór U jest otwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \cap X^{(n)}$ jest otwarty dla dowolnego n.*

5. *Działanie $\rho : G \times X \to X$ grupy G określamy przez*

$$\rho_g \Phi_\alpha(x, g'H) = \Phi_\alpha(x, gg'H).$$

Pojęcia komórki, odwzorowania charakterystycznego i doklejającego definiujemy podobnie jak w wypadku CW-kompleksów.

Przyjmijmy teraz, że G jest skończona i działa dodatkowo na zbiorach $\tilde{X}, \tilde{X}'$ w sposób wolny. Ostatnie stwierdzenie można wówczas odwrócić. Nie tylko przekształcenia (ρ, ρ')-ekwiwariantne $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ nakrywają przekształcenia przestrzeni $X = \tilde{X}/G$, ale też odwzorowania przestrzeni $X \to X'$ podnoszą się do ekwiwariantnych odwzorowań $\tilde{X} \to \tilde{X}'$. Aby uprościć zapis, będziemy tak samo oznaczać elementy $\pi_1(X, x_0)$ oraz $\pi_1(X', y_0)$ jak odpowiadające im elementy $Aut_X(\tilde{X}), Aut_{X'}(\tilde{X}')$. Niech $q : \tilde{X} \to X$ oraz $q' : \tilde{X}' \to X'$ będą przekształceniami ilorazowymi, a $\tilde{x}_0 \in q^{-1}(x_0), \tilde{y}_0 \in q'^{-1}(y_0)$ dowolnymi elementami włókien. Mamy wówczas

Stwierdzenie 1.0.2. *Niech X, X' będą lokalnie łukowo spójnymi G-przestrzeniami. Niech $f : X \to X'$ będzie przekształceniem ciągłym. Przyjmijmy też, że $f(x_0) = y_0$. Niech $f_\sharp : Aut_X(\tilde{X}) \to Aut_{X'}(\tilde{X}')$ będzie przekształceniem indukowanym takim, że*

$$f_\sharp(\rho_g) = \rho'_g.$$

Niech ponadto $q_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, x_0) \leqslant q'_\sharp(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$. Wówczas istnieje (ρ, ρ')-ekwiwariantne podniesienie $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$.

Dowód. Definiujemy

$$fq = f_0 : \tilde{X} \to X'.$$

Skoro z założenia $q_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, x_0) \leqslant q'_\sharp(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$, to również

$$f_\sharp q_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leqslant q'_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{y}_0)).$$

Zatem na mocy własności podnoszenia przekształceń (jej dowód można znaleźć na przykład w [Hatcher] s. 62) istnieje podniesienie

$$\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$$

przekształcenia f_0. Tak uzyskane odwzorowanie spełnia lokalnie równanie

$$\tilde{f} = q'^{-1} fq.$$

To, że tak uzyskane przekształcenie jest (ρ, ρ')-ekwiwariantne wynika bezpośrednio z faktu, że $f_\sharp(\rho) = \rho'$. □

Co więcej homotopie przekształceń przestrzeni X podnoszą się do homotopii ekwiwariantnych przestrzeni $\tilde{X}$.

Stwierdzenie 1.0.3. *Przyjmijmy oznaczenia i założenia poprzedniego stwierdzenia. Niech $H : X \times I \to X'$ będzie homotopią łączącą f z g i niech $f_\sharp(\rho_g) = \rho'_g$. Wówczas podniesienie $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}$ jest homotopią (ρ, ρ')-ekwiwariantną.*

Dowód. Przeprowadzając analogiczne do poprzedniego rozumowanie i korzystając z faktu, że $\pi_1(Z \times I, (z_0, t)) \simeq \pi_1(Z, z_0)$ dla dowolnej lokalnie łukowo spójnej przestrzeni Z oraz $t \in I$ widzimy, że istnieje podniesienie

$$\tilde{H} : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}'$$

homotopii H. Skoro $H(\cdot, t) : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ dla każdego t jest (ρ, ρ'_t) ekwiwariantne, to wystarczy pokazać, że $\rho'_t = \rho'_0$ dla każdego t. To wynika jednak z definicji grupy podstawowej, mianowicie z faktu, że homotopia nie może łączyć dwóch różnych klas pętli.

□

Rozdział 2

Przestrzenie soczewkowe

Na sferach wymiaru nieparzystego S^{2n-1} można w naturalny sposób wprowadzić działanie grupy $\mathbb{Z}_m$. Mianowicie S^{2n-1} zanurza się w zwykły sposób jako $\{v \in \mathbb{R}^{2n} : \|v\| = 1\}$ w $\mathbb{R}^{2n}$ (lub, co wygodniej przyjąć dla prostoty i czytelności dalszych rozważań, w $\mathbb{C}^n$). Wybierzmy n płaszczyzn prostopadłych $X_i \subseteq \mathbb{R}^{2n}, i = 1, \ldots, n$ takich, że $\mathbb{R}^{2n} = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Na każdej z tych podprzestrzeni X_i grupa $\mathbb{Z}_m$ działa przez obroty o kąt $2\pi/m$. Sfera S^{2n-1} jest niezmiennicza względem tego działania, zaś jego orbity mają moc m.
Zauważmy dalej, że jeśli $l_1, \ldots l_n \in \mathbb{Z}$ oraz dla dowolnego i $(l_i, m) = 1$, to równoczesne obroty o $2l_i\pi/m$ na płaszczyznach X_i wciąż będą mieć m-elementowe orbity, zatem będą realizować wolne działanie grupy $\mathbb{Z}_m$ na S^{2n-1}. Przedmiotem niniejszej pracy są przestrzenie orbit sfer nieparzyście wymiarowych względem opisanego działania grupy $\mathbb{Z}_m$. Definicje i fakty zawarte w tym rozdziale pochodzą głównie z pracy [Hatcher]

Definicja 2.0.8. ***Przestrzenią soczewkową*** *$L_m(l_1, \ldots, l_n)$ nazwiemy przestrzeń $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$, gdzie działanie $\rho : \mathbb{Z}_m \to Aut(S^{2n-1})$ jest zdefiniowane*

$$\rho_s(z_1, \ldots, z_n) = (e^{2\pi i s l_1/m}, \ldots, e^{2\pi i s l_n/m}),$$

dla $(z_1, \ldots, z_n) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ oraz $s \in \mathbb{Z}_m$.

Przykłady

1. Dla $n = 1$ oraz dowolnego m zgodnie z powyższą definicją przestrzeń soczewkowa powstaje w wyniku sklejenia w S^1 punktów $e^{\vartheta 2\pi i}$ oraz $e^{\vartheta \frac{kl_1}{m} 2\pi i}$ dla $k = 1, \ldots m$. Zatem $L_m(l_1) = S^1$.

2. Dla dowolnego n oraz $m = 2$ opisane działanie grupy $\mathbb{Z}_2$ to obrót o kąt π na każdej z wyróżnionych płaszczyzn ortogonalnych w $\mathbb{R}^{2n}$ czyli odbicie symetryczne $\rho(z) = -z$. Zatem dla $m = 2$ przestrzeń soczewkowa $L_2(1, \ldots, 1)$ to przestrzeń rzutowa $\mathbb{RP}_{2n-1}$. W istocie o przestrzeniach soczewkowych można myśleć jako o uogólnieniu przestrzeni rzutowych.

Uzasadnijmy jeszcze, czemu w definicji przestrzeni soczewkowej ograniczyliśmy się do sfer S^{2n-1}. Intuicyjnie wydaje się jasne, że w wypadku sfer parzyście wymiarowych, nie można po zanurzeniu w $\mathbb{R}^k$ pogrupować współrzędnych w pary, na których $\mathbb{Z}_m$ działa przez obroty. Ujmijmy to ściślej.

Stwierdzenie 2.0.4. *Niech G działa na S^{2n} w sposób ciągły i wolny. Wówczas $G \leqslant \mathbb{Z}_2$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego k jeśli $f : S^k \to S^k$ nie ma punktów stałych, to f jest homotopijne z $-id$. Istotnie, homotopię zadaje:

$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{\|(1-t)f(x) + t(-x)\|}.$$

Wyrażenie powyższe jest dobrze określone, bo odcinek łączący x z $f(x)$ nie przechodzi przez początek układu współrzędnych. Czyli

$$\deg(f) = \deg(-id) = (-1)^{k+1}$$

Teraz: skoro $\deg fg = \deg f \deg g$, to odwzorowanie

$$f \longmapsto \deg f$$

jest homomorfizmem

$$\Phi : G \to \mathbb{Z}_2.$$

Dowolny homeomorfizm S^{2n} bez punktów stałych przechodzi przy powyższym odwzorowaniu na -1. Czyli $\ker \Phi = id$. Zatem

$$G \leqslant \mathbb{Z}_2.$$

□

Określimy teraz na S^{2n-1} indukcyjnie $\mathbb{Z}_m$-CW-strukturę.

Stwierdzenie 2.0.5. *Niech*

$$\mathbb{C}^n \supset S^{2n-1} \supseteq X^{(2n-1)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(0)}$$

będzie zdefiniowane $X^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} X_j^{(k)}$*, gdzie:*

1. $X_j^{(0)} = \{(e^{2j\pi i/m}, 0, \ldots, 0)\}, j = 0, \ldots m-1$
2. $X_j^{(2k)} = \Big\{\cos\vartheta(v, \overline{0}) + \sin\vartheta(\overline{0}, e^{j2\pi i/m}, \overline{0}) : v \in X^{(2k-1)}, \vartheta \in [0, \pi/2]\Big\}, k \leqslant n$
3. $X_j^{(2k+1)} = \Big\{\cos\vartheta(v, \overline{0}) + \sin\vartheta(\overline{0}, e^{\phi(2\pi i j)/m + (1-\phi)(2\pi i(j+1))/m}, \overline{0}) : v \in X^{(2k-1)}, \vartheta \in [0, \pi/2], \phi \in [0,1]\Big\}, k \leqslant n.$

Wówczas $X^{(i)}$ *jest i-tym szkieletem* S^{2n-1} *a co więcej* $X^{(2k-1)} = S^{2k-1}$.

Dowód. Na początek pokażemy przez indukcję, że dla dowolnego $k > 0$ $X_j^{(k)}$ istotnie jest ciągłym obrazem (j, D^k) przy przekształceniu, które przeprowadza $\mathbb{Z}_m \times \partial D^k$ w $X^{(k-1)}$, i które jest homeomorfizmem na $\mathbb{Z}_m \times intD^k$.
Dla $k = 0$ teza jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że $k > 0$ oraz $X^{(2k-1)} \simeq S^{2k-1}$. Mamy:

$$D^{2k} = \{tv : v \in S^{2k-1}, t \in [0,1]\} = \{\cos(\vartheta)v : v \in S^{2k-1}, \vartheta \in [0, \pi/2]\}$$

Przy czym
$$\partial D^{2k} = \{\cos(\vartheta)v : v \in S^{2k-1}, \vartheta = 0\}.$$
Stąd widać, że przekształcenie
$$(\cos(\vartheta)v, \overline{0}) \longmapsto (\cos(\vartheta)v, \sin(\vartheta))$$
jest homeomorfizmem $(0, D^{2k})$ na X_0^{2k}, który przeprowadza $\underline{(0, S^{2k-1})}$ w X^{2k-1}. W istocie X_0^{2k} przedstawiliśmy jako wykres funkcji ciągłej określonej na $\overline{D^{2k}}$ i nieosobliwej w $int(D^{2k})$. Znaleźliśmy zatem odwzorowanie charakterystyczne $X_0^{(2k)}$. Odwzorowania charakterystyczne komórek $X_a^{(2k)}$ dla $a \in \mathbb{Z}_m$ definiujemy jako złożenie przekształcenia charakterystycznego komórki X_0^{2k} z działaniem ρ_a grupy $\mathbb{Z}_m$.
Teraz pokażemy, że $X_0^{(2k+1)}$ jest obrazem $(0, D^{2k+1})$ przy przekształceniu ciągłym, które przeprowadza $(0, \partial D^{(2k+1)})$ na $X_0^{(2k)} \cup X_1^{(2k)}$. Rozważmy następującą parametryzację:
$$D^{2k+1} = \Big\{\cos(\vartheta)(v,0) + \sin(\vartheta)(\overline{0}, \phi) : \phi \in [-1,1], \vartheta \in [0, \pi/2], v \in S^{2n-1}\Big\}.$$
Przy czym mamy:
$$\partial D^{2k+1} = \Big\{\cos(\vartheta)(v,0) + \sin(\vartheta)(\overline{0}, \phi) : \phi = -1, 1, \vartheta \in [0, \pi/2], v \in S^{2n-1}\Big\}.$$
Teraz zauważmy, że przekształcenie
$$((v\cos\vartheta, \phi\sin\vartheta) \longmapsto (v\cos\vartheta, \sin\vartheta e^{(\phi+1)\pi i/m})$$
jest homeomorfizmem. W oczywisty sposób jest ciągłe. Jest injekcją, gdyż wobec faktu, że $\|v\| = 1$ oraz $\vartheta \in [0, \pi/2]$, przedstawienie $w = \cos\vartheta(v,0) + \sin\vartheta(\overline{0}, e^{(\phi+1)\pi i/m})$ jest jednoznaczne. Również funkcja
$$\phi \longmapsto e^{(\phi+1)\pi i/m}$$
jest dla $\phi \in [-1,1]$ różnowartościowa. Przekształcenia odwrotne do wyżej opisanych, o ile są dobrze określone, są też ciągłe.
Opisany homeomorfizm przeprowadza $(0, D^{2k+1})$ na $X_0^{(2k+1)}$, zaś $(0, S^{2k})$ w $X_0^{(2k)} \cup X_1^{(2k)}$, zatem jest odwzorowaniem charakterystycznym. Bezpośrednio z definicji odwzorowań charakterystycznych $\Phi_j : \mathbb{Z}_m \times D^j \to X^{(j-1)}$ badanego kompleksu wynika, że dla $g, h \in \mathbb{Z}_m$ mamy
$$\rho_g X_h^{(j)} = \rho_g \Phi_j[(h, D^j)] = \Phi_j[(gh, D^j)].$$
Czyli X faktycznie jest $\mathbb{Z}_m$-CW-kompleksem.

□

W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, że jeśli $\tilde{X}$ jest GCW-kompleksem, a G działa w sposób wolny na $\tilde{X}$, to $X = \tilde{X}/G$ z odwzorowaniami charakterystycznymi $q \circ \phi_\alpha$ dla ϕ_α - odwzorowań charakterystycznych $\tilde{X}$ oraz q przekształcenia ilorazowego. W szczególności przyjąwszy $\tilde{X} = S^{2n-1}$, $X = L_m(l_1, \ldots, l_n)$ uzyskujemy

Stwierdzenie 2.0.6. *Niech*
$$S^{2n-1} = \tilde{X}^{(2n-1)} \supset \ldots \supset \tilde{X}^{(1)} \supset \tilde{X}^{(0)}$$
będzie CW-rozkładem sfery opisanym wyżej. Niech
$$X^{(i)} = q[\tilde{X}_0^i],$$

gdzie $q : S^{2n-1} \to L$ przekształcenie ilorazowe. Wówczas

$$L_m(l_0, \ldots, l_n) = X^{(2n-1)} \supset \ldots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}$$

jest CW-rozkładem przestrzeni soczewkowej.

Teraz obliczymy homologie przestrzeni soczewkowych. Przyda się do tego następujący

Lemat 2.0.1. *Niech $s : S^k \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ będzie symetrią względem hiperpłaszczyzny k-wymiarowej $\mathcal{H}$, takiej, że $\mathcal{H} \cap S^k = S^{k-1}$. Wówczas* $\deg s = -1$.

Dowód. Istotnie, wynika to wprost z trzeciego punktu definicji stopnia odwzorowania. Odbicie względem hiperpłaszczyzny k-wymiarowej można w pewnej bazie ortonormalnej przedstawić wzorem

$$(\cos\vartheta(\sin\phi, \cos\phi, \bar{0}) + \sin\vartheta(0, 0, v)) \longmapsto (\cos\vartheta(\sin -\phi, \cos -\phi, \bar{0}) + \sin\vartheta(0, 0, v)),$$

gdzie $|v| = 1$. □

Stwierdzenie 2.0.7. *Niech $L = L_m(l_1, \ldots, l_n)$ będzie przestrzenią soczewkową. Wówczas jej grupy homologii są dane:*

$$H_k(L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } k = 0, 2n+1 \\ \mathbb{Z}_m & \text{dla } k = 2, 4, \ldots 2n \\ 0 & \text{dla } k \text{ parzystych lub } k > 2n+1. \end{cases}$$

Dowód. Niech

$$S^{2n-1} = \tilde{X}^{(2n-1)} \supset \ldots \supset \tilde{X}^{(1)} \supset \tilde{X}^{(0)}$$

będzie opisanym w poprzednim Stwierdzeniu CW-rozkładem sfery, zaś

$$L = X^{(2n-1)} \supset \ldots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}$$

rozkładem przestrzeni soczewkowej.

Rozważmy diagram przekształceń indukowanych na kompleksach łańcuchowych

$$\begin{tikzcd}
 & \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}^{m} \arrow[d, equal] & \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}^{m} \arrow[d, equal] & \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}^{m} \arrow[d, equal] & \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & C_{2k+1}(\tilde{X}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "q_*"'] & C_{2k}(\tilde{X}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "q_*"'] & C_{2k-1}(\tilde{X}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "q_*"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & C_{2k+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & C_{2k}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & C_{2k-1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \ldots \\
 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

Chcemy ustalić, jakie są przekształcenia brzegowe CW-kompleksu przestrzeni soczewkowej. Najpierw zauważmy, że powyższe diagramy są przemienne. Zauważmy też, że dla dowolnego q_* w powyższym diagramie

$$q_*(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 1.$$

Mianowicie bezpośrednio z definicji CW-struktury na L wynika, że $q_*(1,0,\dots,0) = 1$, to znaczy $q_*[\tilde{X}_0^{(j)}] = [X^{(j)}]$. A skoro dla dowolnego k mamy

$$[\tilde{X}_k^{(j)}] = \rho_{g^s *}[\tilde{X}_0^{(j)}],$$

zaś z definicji przestrzeni ilorazowej $q\rho = id$, to dla dowolnej komórki j-tego szkieletu $q_*(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = 1$.

Ustalimy postać $\partial : C_{2k} \to C_{2k-1}$. Mamy

$$\partial[\tilde{X}_0^{(2k)}] = \sum_{j=1}^{m} [\tilde{X}_j^{(2k-1)}].$$

Rzeczywiście mamy następujący ciąg przekształceń:

$$\partial D^{2k} \xrightarrow{\chi_{|\partial D^{2k}}} \tilde{X}^{2k-1} \xrightarrow{\pi} \tilde{X}^{2k-1}/\tilde{X}^{2k-2} \simeq \bigvee_{j=1}^{m} S_j^{2k-1},$$

gdzie χ zdefiniowaliśmy dokładnie tak, że $\chi_{|\partial D^{2k}} = id$. A istotnie przekształcenie indukowane przez π na kompleksach łańcuchowych $C_{2k}(\tilde{X}^{(2k)}, C_{2k}(\tilde{X}^{2k}/\tilde{X}^{2k-1})$ ma postać

$$[\tilde{X}^{2k}] \longmapsto \sum_{j=1}^{m} [\tilde{X}_j^{2k}/\tilde{X}^{2k-1}].$$

Zatem kwadrat po lewej na badanym diagramie ma postać

$$\begin{array}{ccc} (0,\dots,0,1,0,\dots,0) & \xrightarrow{\partial} & (1,\dots,1) \\ {\scriptstyle q_*}\big\downarrow & & {\scriptstyle q_*}\big\downarrow \\ 1 & \xrightarrow{\partial} & m \end{array} \tag{2.1}$$

Teraz pokażemy, że $\partial : C_{2k+1} \to C_{2k}$ jest przekształceniem zerowym. Odwzorowanie charakterystyczne χ komórki $\tilde{X}_0^{2k+1}$ określiliśmy tak, że

$$\chi_{|S^-} = \tilde{X}_0^{2k}$$

$$\chi_{|S^+} = \tilde{X}_1^{2k},$$

gdzie $\partial D^{2k+1} = S^+ \cup S^-$ górna i dolna półsfera w S^{2k}. Przy tym

$$\chi_{|S^-} = \chi_{|S^+} \circ s,$$

gdzie s - symetria względem płaszczyzny zawierającej $S^+ \cap S^-$. Wobec ostatniego Lematu $\deg s = -1$ zatem na mocy definicji przekształcenia ∂ i faktu, że $\deg s\phi = \deg s \deg \phi$ mamy

$$\partial : (1,0\dots,0) \longmapsto (\alpha, -\alpha, 0, \dots, 0)$$

dla pewnego α. Toteż prawy kwadrat w diagramie ma postać

$$\begin{array}{ccc} (0,\dots,0,1,0,\dots,0) & \xrightarrow{\partial} & (\alpha,-\alpha,0,\dots,0) \\ {\scriptstyle q_*}\big\downarrow & & {\scriptstyle q_*}\big\downarrow \\ 1 & \xrightarrow{\partial} & 0 \end{array} \tag{2.2}$$

Fakt, że przy obliczaniu ∂ rozważaliśmy jedynie X_0^{2k} oraz X_0^{2k+1} nie ma oczywiście znaczenia, bo dla dowolnego k zachodzi $X_k^j = \rho_g(X_0^j)$ dla pewnego $g \in \mathbb{Z}_m$, zaś $\deg \rho_g = 1$, bo to złożenie obrotów.

Ostatecznie kompleks łańcuchowy przestrzeni soczewkowych wygląda tak:

$$\ldots \xrightarrow{\;\;0\;\;} C_{2n+1}(X) \xrightarrow{\;\;0\;\;} C_{2n}(X) \xrightarrow{\;\;m\;\;} C_{2n-1}(X) \xrightarrow{\;\;0\;\;} \ldots, \tag{2.3}$$

gdzie $C_i(X) \simeq \mathbb{Z}$ dla dowolnego i. Stąd bezpośrednio wynika teza twierdzenia.

$\square$

Rozdział 3

Klasyfikacja przestrzeni soczewkowych

Wykorzystamy teraz ogólne wiadomości o przekształceniach ekwiwariantnych przestrzeni nakrywających oraz informacje o $\mathbb{Z}_m$-CW-strukturze sfer S^{2n-1}, aby przeprowadzić klasyfikację przestrzeni soczewkowych z dokładnością do typu homotopijnego. Informacje zawarte w tym rozdziale zostały zaczerpnięte z [Cohen] ss.91-100. W poprzednim rozdziale wykazaliśmy, że grupy homologii przestrzeni $L_m(l_1, \ldots, l_n)$ w ogóle nie zależą od współczynników l_i. Okazuje się jednak, że już typ homotopijny przestrzeni soczewkowych jest wyznaczony nie tylko przez wymiar przestrzeni i parametr m. Zatem przestrzenie soczewkowe stanowią przykład rozmaitości, które nie są homotopijnie równoważne mimo że mają izomorficzne grupy homologii.

W kilku następnych stwierdzeniach powiążemy homotopie między przekształceniami sfer, które nakrywają homotopie przestrzeni soczewkowych, ze współczynnikami l_i W toku całego dalszego wywodu ρ, ρ' będą oznaczać działania $\mathbb{Z}_m$ na S^{2n+1} przez

$$\rho(z_1, \ldots, z_n) = (z_1 e^{l_1 2\pi i/m}, \ldots, z_n e^{l_n 2pii/m}),$$
$$\rho'(z_1, \ldots, z_n) = (z_1 e^{l_1' 2\pi i/m}, \ldots, z_n e^{l_n' 2pii/m}),$$

zaś L, L' odpowiednie przestrzenie ilorazowe.

Przedstawimy teraz główne stwierdzenie tego rozdziału, które daje informacje o stopniach przekszatałceń S^{2n-1} ekwiwariantnych względem działania grupy $\mathbb{Z}_m$ i pozwoli wyciągnąć wnioski na temat klas homotopijnej równoważności przestrzeni soczewkowych.

Stwierdzenie 3.0.8. *Jeżeli $\tilde{f}, \tilde{g} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ są przekształceniami (ρ, ρ')-ekwiwariantnymi, to*

$$\deg \tilde{f} \equiv \deg \tilde{g} \pmod m.$$

Dowód. Niech $\tilde{f}, \tilde{g} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ będą dowolnymi dwoma przekształceniami (ρ, ρ')-ekwiwariantnymi. Niech

$$S^{2n-1} = X^{(2n-1)} \supset X^{(2n-2)} \supset \ldots \supset X^{(0)}$$

będzie CW-rozkładem sfery opisanym w poprzednim rozdziale. Zdefiniujmy na produkcie $S^{2n-1} \times I = P$ CW strukturę

$$P = P^{2n} \supset P^{2n-1} \supset \ldots \supset P^0.$$

Niech dla $0 < i < 2n$ szkielety będą dane

$$P^i = X^{(i)} \times \{0, 1\} \cup X^{(i-1)} \times I.$$

Z komórkami i-tego szkieletu postaci $X_j^{(i)} \times \{0\}, X_j^{(i)} \times \{1\}, X_j^{(i-1)} \times I$. Odwzorowania charakterystyczne określamy z kolei:

$$\bar{\chi} : D^{i+1} \simeq D^i \times I \to P^{i+1}$$

$$\bar{\chi} = (\chi \times id_I) \circ h$$

Przy czym $h : D^{i+1} \to D^i \times I$ to dowolny homeomorfizm zachowujący orientację. Po tych przygotowaniach zdefiniujemy przekształcenie $\tilde{H} : P^{2n-1} \to S^{2n-1}$ takie, że

$$\tilde{H}_{|S^{2n-1}\times\{0\}} = \tilde{f}$$

$$\tilde{H}_{|S^{2n-1}\times\{0\}} = \tilde{g}$$

$$\tilde{H} \circ (\rho \times id_I) = \rho' \circ \tilde{H}.$$

Przekształcenie $\tilde{H}$ jest zatem podobne do ekwiwariantnej homotopii, ale nie jest określone na całym produkcie. Będziemy indukcyjnie definiować $\tilde{H}^i$ spełniające wymienione warunki rozszerzając je na szkielety coraz wyższego wymiaru. Niech więc

$$\tilde{H}^0 : S^{2n-1} \times \{0,1\} \to S^{2n-1} = \tilde{f} \cup \tilde{g}.$$

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już $\tilde{H}^k$ określone na $P^k \cup S^{2n-1} \times \{0,1\}$. Zauważmy, że $\partial(X_0^{(k)} \times I) = X_0^{(k)} \times \{0,1\} \cup \partial X_0^{(k)} \times I \subset P^k \cup S^{2n-1} \times \{0,1\}$, czyli w szczególności $\tilde{H}^k$ jest określone na $\partial(X_0^{(k)} \times I)$. Istnieje przedłużenie

$$H_0^{k+1} : X_0^{(k)} \times I \to S^{2n+1},$$

bo przekształcenie ze sfery $\partial(X_0^{(k)} \times I)$ wymiaru $k-1 < 2n-1$ w S^{2n-1} nie jest surjekcją, zatem jest homotopijny z odwzorowaniem stałym i można je przedłużyć na całe $X_0^{(k)} \times I$

Przedłużamy $\tilde{H}_0^{k+1}$ do

$$\tilde{H}^{k+1} : P^{k+1} \cup S^{2n+1} \times \{0,1\} \to S^{2n+1}$$

kładąc dla $x \in X_j^{(k+1)} \times I$

$$\tilde{H}^{k+1}(x,t) = \rho'^s \circ \tilde{H}_0^{k+1} \circ (\rho^{-s} \times id_I)(x,t).$$

gdzie s określamy przez $X_j^{(k)} = \rho^s(X_0^{(k)})$. Skoro na mocy założenia indukcyjnego powyższa równość była spełniona dla $x \in X^{(k)} \times I \cup S^{2n+1} \times \{0,1\}$, to $\tilde{H}^{k+1}$ jest dobrze określone i istotnie jest przedłużeniem $\tilde{H}^k$. To, że $\tilde{H}^{k+1}$ jest ekwiwariantne wynika wprost z definicji. W końcu przyjmujemy $\tilde{H} = \tilde{H}^{2n-1}$. Niech teraz

$$\tilde{H}_j = \tilde{H}_{|\partial P_j^{(2n-1)}}.$$

Zauważmy, że $\tilde{H}_j$ to odwzorowanie ze sfery wymiaru $2n-1$ w sferę tego samego wymiaru. Ma zatem dobrze określony stopień. Zauważmy, że

$$\sum_j \deg \tilde{H}_j = \deg \tilde{f} - \deg \tilde{g}.$$

Faktycznie, mamy bowiem

$$\partial[X_j^{(2n-1)} \times I] \quad = \quad [X_j^{(2n-1)} \times \{1\}] - [X_j^{(2n-1)} \times \{0\}] + [\partial(X_j^{(2n-1)}) \times I]$$

$$= [X_j^{(2n-1)} \times \{1\}] - [X_j^{(2n-1)} \times \{0\}] + [(X_j^{(2n-2)}) \times I] - [(X_{j+1}^{(2n-2)}) \times I]. \tag{3.2}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_j \partial[X_j^{(2n-1)} \times I] &= \sum_j [X_j^{(2n-1)} \times \{1\}] - [X_j^{(2n-1)} \times \{0\}] \\ &= [X^{(2n-1)} \times \{1\}] - [X^{(2n-1)} \times \{0\}] \end{aligned}$$

Jednak skoro $\tilde{H}_j = \rho^s \circ \tilde{H}_0 \circ (\rho'^{-s} \times id)$, to $\deg \tilde{H}_j = \deg \tilde{H}_0$. Czyli

$$\deg \tilde{f} - \deg \tilde{g} = m \deg \tilde{H}_0 \equiv 0 \pmod{m}.$$

□

Łatwo wynika stąd kolejne ważne

Stwierdzenie 3.0.9. *Niech $\tilde{f}, \tilde{g} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ będą (ρ, ρ')-ekwiwariantne. Jeżeli ponadto $\deg \tilde{f} = \deg \tilde{g}$, to $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ są homotopijne.*

Dowód. Z dowodu poprzedniego stwierdzenia wynika bowiem, że wówczas

$$m \deg \tilde{H}_0 = \deg \tilde{f} - \deg \tilde{g} = 0$$

czyli $\tilde{H}_0 : \partial(X_0^{(2n-1)} \times I) \to S^{2n-1}$ jest przekształceniem homotopijnym z odwzorowaniem stałym. Zatem rozszerza się do funkcji

$$\tilde{H}_0' : (X_0^{(2n-1)} \times I) \to S^{2n-1}.$$

Tak jak poprzednio kładziemy

$$\tilde{H}^{2n-1}(x,t) = \rho'^s \circ \bar{H}_0^{2n-1}(\cdot, t) \circ \rho^{-s}(x)$$

dla $x \in \rho^s(X_0^{(2n-1)}) \times I$. Zdefiniowane właśnie $\tilde{H}$ jest ekwiwariantną homotopią łączącą $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$.

□

Wykazaliśmy właśnie, że przekształcenia ekwiwariantne mają ten sam stopień $\pmod{m}$. Teraz pokażemy, jak *explicite* wyrazić ten stopień. Zauważmy, że współczynniki l_i wyznaczające przekształcenie ρ są z założenia rzędu m, czyli istnieją elementy l_i^{-1} odwrotne do nich.

Stwierdzenie 3.0.10. *Dla dowolnych $l_1, \ldots l_n, l_1', \ldots, l_n'$ względnie pierwszych z m istnieje (ρ, ρ')-ekwiwariantne $\tilde{f} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ takie, że*

$$\deg \tilde{f} \equiv l_1^{-1} \ldots l_n^{-1} l_1' \ldots l_n' = d \pmod{m}.$$

Dowód. Explicite wskażemy pewne (ρ,ρ')-ekwiwariantne przekształcenie $\tilde{g}: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ stopnia d. Niech

$$\tilde{g}(z_1,\dots,z_n) = (z_1^{l_1^{-1}l_1'},\dots z_n^{l_n^{-1}l_n'}).$$

Łatwo widać, że $\tilde{g}$ jest (ρ,ρ')-ekwiwariantne. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\circ\rho(z) &= \tilde{g}(e^{l_1 2\pi i/m}z_1,\dots,e^{l_n 2\pi i/m}z_n)\\
&= (e^{l_1 2\pi i/m l_1^{-1}l_1'}z_1^{l_1^{-1}l_1'},\dots,e^{l_n 2\pi i/m l_n^{-1}l_n'}z_n^{l_n^{-1}l_n'})\\
&= (e^{2\pi i/m l_1'}z_1^{l_1^{-1}l_1'},\dots,e^{2\pi i/m l_n'}z_n^{l_n^{-1}l_n'})\\
&= \rho'\circ\tilde{g}(z).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nietrudno się też przekonać, że $\deg\tilde{g} = l_1^{-1}\dots l_n^{-1}l_1'\dots l_n'$. Niech bowiem

$$\tilde{g}_{2i}(z_1,\dots,z_n) = (z_1,\dots,z_i^{l_i^{-1}},\dots,z_n)$$

oraz

$$\tilde{g}_{2i-1}(z_1,\dots,z_n) = (z_1,\dots,z_i^{l_i'},\dots,z_n)$$

dla $i \in \{1,\dots,n\}$. Mamy wówczas $\tilde{g} = \tilde{g}_1\circ\dots\tilde{g}_{2n}$, a stąd

$$\deg\tilde{g} = \prod_i \deg\tilde{g}_i.$$

Widzimy, że $\deg\tilde{g}_{2i} = l_i$ oraz odpowiednio $\deg\tilde{g}_{2i+1} = l_i'$. Wynika to wprost z trzeciego warunku definicji stopnia odwzorowania, bo rozważane przekształcenie to l_i-krotne nawinięcie okręgu na jednej z dwuwymiarowych podpłaszczyzn. □

Aby uzupełnić obraz sytuacji dodajmy jeszcze, że powyższe stwierdzenie można odwrócić.

Stwierdzenie 3.0.11. *Niech $\tilde{f}: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ będzie dowolnym przekształceniem (ρ,ρ')-ekwiwariantnym. Wówczas dla dowolnego d takiego, że*

$$d \equiv \deg\tilde{f} \pmod{m}$$

istnieje przekształcenie (ρ,ρ')-ekwiwariantne $\tilde{g}$ takie, że $\deg\tilde{g} = d$.

Dowód. Niech $\tilde{f}: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ będzie dowolnym odzorowaniem (ρ,ρ')-ekwiwariantnym. Weźmy dowolne k. Zdefiniujemy odwzorowanie ewiwariantne $\tilde{g}$ stopnia $\deg\tilde{f} + km$. Niech D będzie dowolnym dyskiem wymiaru $2n-1$ takim, że $\bar{D} \subset intX^{(2n-1)}$. Niech Q będzie z kolei dyskiem $2n-1$-wymiarowym takim, że $\bar{Q} \subset int(D)$. Niech $h: D^{2n-1} \to D$ będzie takim homemorfizmem, że $h^{-1}[Q] = \{v \in D^{2n-1} : \|v\| \leqslant 1/2\}$. Niech teraz $\tilde{g}_0 : X_0^{(2n-1)} \to S^{2n-1}$ będzie określone:

$$\tilde{g}_0(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{dla } x \in X_0^{(2n-1)} \setminus D \\ \tilde{f}(h((2t-1)y)) & \text{dla } t\in[0,1],\quad x = h(ty) \in D\setminus Q,\quad y \in S^{2n-1}, \\ \tilde{g}'(x) & \text{dla } x \in Q \end{cases}$$

gdzie $\tilde{g}'$ jest dowolnym przekształceniem stopnia k, które przeprowadza ∂Q na $f(h(0))$. Takie odwzorowania istnieją, wystarczy bowiem rozważyć przekształcenie

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (z_1^k, z_2, \ldots, z_n)$$

dla $(z_1, \ldots z_n) \in S^{2n-1}$ i złożyć je ze ściągnięciem dysku $\bar{Q}/\partial\bar{Q}$. Przedłużamy następnie $\tilde{g}_0$ do $\tilde{g} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ definiując

$$\tilde{g}(x) = \rho'^s \circ \tilde{g}_0 \circ \rho^{-s}$$

dla $x \in X_s^{(2n-1)}$. Wprost z tego, jak zdefiniowaliśmy przedłużenie wynika, że $\tilde{g}$ jest (ρ, ρ')-ekwiwariantne. Mamy też

$$\deg \tilde{g} = mk + \deg \tilde{f}.$$

□

Możemy teraz przedstawić główne twierdzenie niniejszej pracy. Dowód został zaczerpnięty, podobnie jak większość informacji w tym rozdziale, z [Cohen], ss. 95-6.

Twierdzenie 3.0.1. *Niech* $L = L_m(l_1, \ldots, l_n)$, $\quad L'_m = (l'_1, \ldots, l'_n)$ *będą przestrzeniami soczewkowymi. Wówczas*

$$l_1 \ldots l_n \equiv \pm a^n l'_1 \ldots l'_n \pmod m$$

dla pewnego a *względnie pierwszego z* m*, wtedy i tylko wtedy, gdy* L *jest homotopijnie równoważna z* L'

Dowód. Niech $L_m(l_1, \ldots, l_n)$, $\quad L_m(l'_1, \ldots, l'_n)$ będą takimi przestrzeniami soczewkowymi, że

$$l_1 \ldots l_n \equiv \pm a^n l'_1 \ldots l'_n \pmod m.$$

Teraz: na mocy stwierdzeń 3.0.10 oraz 3.0.11 istnieje przekształcenie $f : L \to L'$ takie, że $\deg f = 1$ oraz $f_\sharp(\rho) = \rho'^a$. Istotnie, niech $\tilde{f} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ będzie dowolnym przekształceniem (ρ, ρ'^a)-ekwiwariantnym stopnia 1. Takie $\tilde{f}$ istnieje na mocy poprzedniego stwierdzenia. Wiemy że $\tilde{f}$ nakrywa przekształcenie ciągłe $f : L \to L'$ takie, że $f_\sharp(\rho) = \rho'^a$. Otóż $\deg f = 1$, bo

$$\deg f \deg q = \deg \tilde{f} \deg q',$$

gdzie $q : S^{2n-1} \to L$, $\quad q' : S^{2n-1} \to L'$ to przekształcenia ilorazowe. Z rozważań w rozdziale drugim wynika, że $\deg q = \deg q' = m$, a stąd

$$\deg f = \deg \tilde{f} = 1.$$

Mając przekształcenie $f : L \to L'$, wskażemy $g : L' \to L$ takie, że $fg \sim id_L$ oraz $gf \sim id_{L'}$. Skoro bowiem

$$l_1 \ldots l_n \equiv a^n l'_1 \ldots l'_n, \quad \pmod m,$$

to

$$a^n \equiv l_1^{-1} \ldots l_n^{-1} l'_1 \ldots l'_n \pmod m.$$

W szczególności a jest odwracalne w $\mathbb{Z}_m$, więc istnieje $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$. Mamy

$$1 \equiv a^n a^{-n} \equiv a^{-n} l_1, \ldots l_n l_1'^{-1}, \ldots l_n'^{-1} \pmod m.$$

Zatem istnieje przekształcenie $g : L' \to L$ takie, że

$$\deg g = 1.$$

oraz $g_\sharp(\rho') = \rho^{a^{-1}}$. Mamy wreszcie

$$\deg fg = \deg f \deg g = 1$$

oraz $(fg)_\sharp \rho = \rho^{aa^{-1}} = \rho$.
Twierdzimy, że $fg \sim id_L$. Wynika to z ogólniejszego faktu: jeśli $h_0, h_1 : L \to L'$ i $\deg h_0 = \deg h_1$, oraz $h_{0\sharp}(\rho) = h_{1\sharp}(\rho) = \rho'$, to

$$h_0 \sim h_1.$$

Faktycznie: weźmy dowolne podniesienia $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1 : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$. Są to przekształcenia (ρ, ρ')-ekwiwariantne. Znów mamy $\deg q' \deg \tilde{h}_0 = \deg h_0 \deg q$, skąd wnioskujemy, że

$$\deg \tilde{h}_0 = \deg \tilde{h}_1.$$

Teraz możemy zastosować główne Stwierdzenie tego rozdziału i stwierdzić, że $\tilde{h}_0$ oraz $\tilde{h}_1$ są (ρ, ρ')-ekwiwariantnie homotopijne, czyli h_0 i h_1 są homotopijne. W końcu stwierdzamy, że

$$fg \sim id_L,$$

$$gf \sim id_{L'}.$$

Czyli L, L' są homotopijnie równoważne.
Z drugiej strony załóżmy, że L i L' są homotopijnie równoważne. Istnieje wówczas przekształcenie (ρ, ρ'^a)-ekwiwariantne $f : L \to L'$ oraz $g : L' \to L$ takie, że

$$fg \sim id_L,$$

$$gf \sim id_{L'}.$$

W szczególności

$$\deg f \deg g = \deg fg = 1.$$

Czyli $\deg f = \pm 1$. Z drugiej strony wiemy, że skoro f jest (ρ, ρ')-ekwiwariantne, to

$$\pm 1 = \deg f \equiv a^n l_1^{-1} \dots l_n^{-1} l_1' \dots l_n' \pmod{m}.$$

□

Analizując powyższe rozumowanie można sformułować kilka dodatkowych wniosków.

Stwierdzenie 3.0.12. *Niech L, L' będą przestrzeniami soczewkowymi wymiaru $2n-1$, a $f, g : L \to L'$ przekształceniami ciągłymi. Wówczas*

1. *$f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg f = \deg g$ oraz $f_\sharp = g_\sharp$.*
2. *Jeśli $f_\sharp(\rho) = \rho'^a$, to $\deg f \equiv a^n l_1^{-1} \dots l_n^{-1} l_1' \dots l_n' \pmod{m}$.*
3. *Dla dowolnego a istnieje przekształcenie f takie, że $\deg f \equiv a^n l_1^{-1} \dots l_n^{-1} l_1' \dots l_n' \pmod{m}$. oraz $f_\sharp(\rho) = \rho'^a$*

Dowód. Wykazaliśmy wszystkie te fakty dla $\deg f \equiv 1 \pmod{m}$ w dowodzie ostatniego twierdzenia. W ogólnym wypadku rozumowanie przebiega bez zmian. Jeśli w wypadku równoważności udowodniliśmy implikację tylko w jedną stronę, to wynikanie w przeciwną jest oczywiste. □

Przedstawmy jeszcze na koniec pełną klasyfikację przestrzeni soczewkowych. Klasyfikację z dokładnością do homeomorfizmu kawałkami liniowego podał Karl Reidemeister w [Reid]. W artykule [Brody] podano dowód, że jest to w istocie klasyfikacja z dokładnością do homeomorfizmu.

Twierdzenie 3.0.2. *Przestrzenie soczewkowe $L_m(l_1, \ldots, l_n)$ i $L_m(l'_1, \ldots, l'_n)$ są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $a \in \mathbb{Z}_m$, że z dokładnością do permutacji współczynników l'_i zachodzi równość*

$$l_i \equiv a\varepsilon_i l'_i \pmod{m},$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

Bibliografia

[Cohen] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homopy Theory*, Springer; New York 1973.

[Hatcher] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[TomDieck] T. tom Dieck, *Transformation groups*, de Gruyter; Berlin, New York 1987.

[Reid] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume*, Abhandlung Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1) 102-109.

[Brody] E. J. Brody, *The topological classification of the lens spaces*, Annals of Mathematics, 2 71(1), 163-184.