Algebraic Topology II problems

Wersja 4 czerwca 2014

♠= zrobione

1) Niech $f, g : M \to N$ będą odwzorowaniami gadkim rozmaitości, oraz $H : (0-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times M \to N$ będzie gładką homotopią: $f(x) = H(0,x)$, $g(x) = H(1,x)$. Definiujemy odwzorowanie kompleksów de Rhama $I : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(N)$, $I(\omega) = \int_{[0,1]} H^*\omega$ (całkowanie po t składowej formy $H^*\omega$, która w lokalnych współrzędnych ma $dt \wedge dx_{i_2} \wedge \dots dx_{i_3} \wedge dx_{i_p}$). Udowodnić, że I (być może po korekcie znaków) jest homotopią pomiędzy f a g.

2) Zadania ze skryptu http://www.mimuw.edu.pl/%7Esjack/ta/kompleksy%5Flancuchowe%5F1.pdf

3) ♠Sprawdzić w Spanierze §4.1.10 formułę rozwiązującą Zadanie 22.

4) ♠Obliczyć homologie przestrzeni soczewkowej $S^{2n-1}/\mathbf{Z}_m$ (gdzie $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$, $\mathbf{Z}_m \subset \mathbf{C}^*$ działa przez mnożenie po współrzędnych). Podać rozkład komórkowy $S^{2n-1}/\mathbf{Z}_m$.

5) ♠Obliczyć homologie $K(\mathbf{Z}_m, 1)$

6) Dane dwa funktory $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i ich transformacja $F \to G$. Pokazać, że indukowane przekształcenia realizacji nerwów $|NF|, |NG| : |N\mathcal{C}| \to |N\mathcal{D}|$ są homotopijne.
(Wniosek: Jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt początkowy to $|N\ \mathcal{C}|$ jest ściagalna.)

7) ♠Niech X zbiór symplicjalny. Wykazać $colim_{\Delta^n \to X} \Delta^n \to X$ jest izomorfizmem. (Tu Δ^n oznacza zbiór symplicjalny $Hom(-, [n])$), granica jest wzięta po kategorii, której obiektami są odwzorowania $\Delta^n \to X$, a odwzorowania postaci
$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^m \\ & \searrow \ \swarrow & \\ & X & \end{array}.$$

8) $f, g : \Delta^n \to X$ są równe wtedy i tylko wtedy gdy $|f|$ i $|g| : |\Delta^n| \to |X|$ są równe.

9) (referat) Niech X przestrzeń topologiczna. Wykazać, że naturalne przekształcenie $|S(X)| \to X$ jest słabą homotopijną równoważnością.

10) ♠Skonstruować triangulację pryzmatu $|\Delta^m| \times |\Delta^n|$.

11) ♠Niech $X_\bullet$ będzie zbiorem symplicjalnym. Przez X_n^{nd} oznaczamy sympleksy niezdegenerowane. Wykazać, że oczywiste przekształcenie
$$\coprod_{k=0}^{\infty} X_k^{nd} \times int(|\Delta|^k) \to |X_\bullet|$$
jest bijekcją.

12) Dane $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ pokrycie przestrzeni X. Załóżmy, że w to pokrycie można wpisacć rozkład jedynki. Udowodnić, że $|N\mathcal{U}|$ jest homotopijnie równoważne z X. (Tu $N\mathcal{U}$ rozumiemy jako topologiczną kategorię.) Graeme Segal, Classifying spaces and spectral sequences. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 34, 105-112 (1968).

13) W powyższym zadaniu załóżmy dodatkowo, że każde niepuste przecięcie $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ jest ściągalne. Wtedy $|\pi_0(N\mathcal{U})| \sim X$.

Tu przez π_0 rozumiemy funktor $\pi_0(-)$ przyłożony do każdego poziomu zbioru symplicjalnego. Otrzymujemy zbiór symplicjalny $Y(n) =$ zbiór ciagów $i_0, i_1, i_2, \dots, i_n$ takich, że $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ jest niepuste.

(Żeby rozwiązać to zadanie można np użyć fakt, że odwzorowanie własciwe ze sciagąlnymi włoknami jest homotopijną rownowaznoscią; oczywscie przy pewnych ogólno-topologicznych założeniach.)

Rozważamy kategorię homotopijną przestrzeni punktowanych. Oznaczenie $[A, B]$ oznacza klasy homotopii odwzorowań przestrzeni z wyróżnionym punktem. Poniżej zakladamy, że (X, A) jest parą CW-kompleksów, $A \neq \emptyset$, bo zawiera punkt wyróżniony. Referencje: książka *Robert M. Switzer, Algebraic topology - homotopy and homology.*.

14) $\frac{1}{2}$♠Dany ciąg przestrzeni topologicznych $\{E_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ oraz odwzorowania $S^1 \wedge E_i \to E_{i+1}$. (Np. $E_i = S^i E_0$ dla $i \geq 0$, ogólnie lepiej coś jeszcze o ciągu E_i założyć, np że E_i jest $i-1$-spójne.) Wykazać, że $h_n(X, A) = \operatorname{colim}_i \pi_{n+i}(E_i \wedge (X/A))$ jest uogólnioną teorią homologii.

Wskazówka: Theorem, str 84 ze skryptu Maya
`http://www.math.uchicago.edu/%7Emay/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

15) Przy powyższych założeniach wykazać, że $h^n(X, A) = \operatorname{colim}_i [S^i(X/A), E_{n+i}]$ jest uogólnioną teorią kohomologii.

16) ♠Dany ciąg przestrzeni E_i o tej własności że $\Omega E_{i+1} \sim E_i$ (tzn. dana jest homotopijna równoważność). Wykazać, że $h^n(X, A) = [(X/A), E_n]$ jest uogólnioną teorią kohomologii.

17) ♠Dana przestrzeń K mająca tę własność, że dla pewnego r mamy homotopijną równoważność $\Omega^r K \sim K$. Wykazać, że $[X, K]$ jest równe $\mathbf{K}^0(X)$ dla pewnej teorii kohomologii. Ściślej mówiąc funktor $X \mapsto [X, K]$ rozszerza się do funktora określonego na parach CW-kompleksów $\mathbf{K}^*(X, A)$ takiego, że $\mathbf{K}^0(X, A) = [X/A, K]$.

18) ♠Udowodnić, że w kompleksie komórkowym dla $[\sigma] \in C_n(\mathcal{X})$ różniczka δ zadana jest wzorem

$$\delta([\sigma]) = \sum_{\tau \in (n-1)-\text{komórki}} a_\sigma^\tau [\tau],$$

gdzie a_σ^τ jest stopniem odwzorowania

$$S^{n-1} \xrightarrow{\chi_\sigma} X_{n-1} \longrightarrow X_{n-1}/X_{n-2} \simeq \bigvee_\tau S_\tau^{n-1} \longrightarrow S_\tau^{n-1}.$$

19) ♠Dane $r \geq 0$. Niech $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ będzie sumą otwartych zbiorów. Załóżmy, że $H^k(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_d}) = 0$ dla $\{i_0, i_1, \ldots, i_d\} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, $k > r$.
(i) pokazać, że $H^k(X) = 0$ dla $k > n + r$.
(ii) jeśli $r = 0$ i dodatkowo przecięcia $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_d}$ są puste lub łukowo spójne to $\overline{H}^n(X) = 0$ dla $n \geq r$.

20) ♠Obliczyć $H_*(D^n \times Y, S^{n-1} \times Y)$.

21) ♠Obliczyć $H_*(S^n \times Y)$

22) Obliczyć $H_*(X * Y)$.

23) Dane przedstawienie grupy $\pi = F/R$, gdzie F jest wolną grupą, a $R \subset F$ jest podgrupą normalną. Udowodnić $H_2(K(\pi, 2); \mathbf{Z}) \simeq R \cap [F, F]/[F, R]$.

24) Dane dwie zamknięte zorientowane rozmaitości wymiaru n. Obliczyć homologie sumy spójnej

$$M\#N \quad = \quad (M \setminus D^n) \underset{\{0\}\times S^{n-1}}{\cup} (I \times S^{n-1}) \underset{\{1\}\times S^{n-1}}{\cup} (N \setminus D^n) \quad .$$

25) Znaleźć utożsamienie $H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ ze zbiorem klas izomorfizmu nakryć 2-krotnych nad X.

26) Znaleźć utożsamienie $H^2(X;\mathbf{Z})$ ze zbiorem klas izomorfizmu zespolonych wiązek liniowych nad X.

27) Przestrzenie Moora: niech $f_{n,d} : S^n \to S^n$ będzie przekształceniem stopnia d. Obliczyć homologie $C(f)$.

28) $f = f_{n,d}$ j.w. Obliczyć homologie teleskopu

$$S^n_{(d^\vee)} = Tel(S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} \ldots)$$

29) Dany CW-kompleks X posklejany za pomocą odwzorowań charakterystycznych χ_σ. Udowodnić, że istnieje przestrzeń $X_{(d^\vee)}$ sklejona z teleskopów, tzn dla każdej komórki σ mamy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\chi_\sigma} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{n-1}_{(d^\vee)} & \xrightarrow{(\chi_\sigma)_{(d^\vee)}} & X^{n-1}_{(d^\vee)} \end{array}$$

oraz

$$X^n_{(d^\vee)} = PushOut(X^{n-1}_{(d^\vee)} \leftarrow \bigsqcup S^{n-1}_{(d^\vee)} \to \bigsqcup C(S^n_{(d^\vee)}))\,.$$

Obliczyć homologie $X_{(d^\vee)}$.

30) Skonstruować taki CW-kompleks Y aby $H_*(Y) = H_*(X) \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$, gdzie $\mathbf{Z}_{(p)}$ oznacza lokalizację pierścienia $\mathbf{Z}$ w ideale (p).

31) ♠Niech $X \to Y$ będzie nakryciem stopnia $d < \infty$. Załóżmy, że d jest odwracalne w pierścieniu R. Znaleźć związek pomiędzy $H_*(X;R)$ a $H_*(Y;R)$. Dla nakryć regularnych udowodnić $H_*(X;R)^G = H_*(Y;R)$, gdzie G jest grupą transformacji nakrywających.

32) ♠Jeśli przestrzeń jest produktem sfer, to ilość i wymiary sfer mogą być odczytane z homologii $H_*(-;\mathbf{Z}_p)$.

33) ♠Czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe dla rzeczywistych przestrzeni rzutowych?

34) ♠Obliczyc $H_*(X;R)$ i $H^*(X;R)$ dla $X = \mathbf{RP}^2$, $\mathbf{RP}^3$, $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RP}^2$, $\mathbf{RP}^3 \times \mathbf{RP}^3$, $R = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_4$ oraz homomorfizmy Bocksteina i $H^*(X,R) \to Hom(H_*(X,R),R)$.

35) Niech, M i N będą R-modułami. Niech $p_X : X \times Y \to X$ i $p_Y : X \times Y \to Y$ będą rzutowaniami. (Np indukcyjnie po szkieletach) wykazać, że gdy $H^*(X;M)$ jest wolnym R-modułem, to

$$\phi : H^*(X;M) \otimes H^*(Y;N) \to H^*(X \times Y, M \otimes N)$$

$$\phi(a \otimes b) = p_X^*(a) \cup p_Y^*(b)$$

jest izomorfizmem.

36) ♠Obliczyć pierścień kohomologii zwartych orientowalnych powierzchni.

37) ♠Dane rozwłóknienie lokalnie trywialne pary $(E, \partial E) \to B$ nad spójną bazą, z włóknem $(F, \partial F)$. Załóżmy, że $H^*(F, \partial F)$ jest grupą wolną, oraz przekształcenie indukowane włożeniem włókna $H^*(E, \partial E) \to H^*(F, \partial F)$ jest epimorfizmem. Udowodnić, że $H^*(E, \partial E) \simeq H^*(F, \partial F) \otimes H^*(B)$. (Wsk. najpierw udowodnić dla skończonych pokryć trywializujących.) Udowodnić analogiczny rezultat dla homologii.

38) Zadania z ksiażki Spaniera (link ze strony)
– str 279 C8, E1
– str 280 D4, D5, G1
– str 281 G3, G4

39) Niech skończona grupa G działa na rozmaitość M zachowując orientację w otoczeniu punktów stałych. Załóżmy, że R jest pierścieniem, w którym $|G|$ jest odwracalne. Udowodnić, że M/G jest R-homologiczną rozmaitością. Policzyć $H^*(M/G;R)$. (Najpierw rozpatrzeć przypadek, gdy poza zbiorem dyskretnym G działa wolno.

40) **Pisemnie. Obliczyć pierścień kohomologii $H^*(\mathbf{RP}^2 \otimes \mathbf{RP}^2;\mathbf{Z})$ i $H^*(\mathbf{RP}^2 \otimes \mathbf{RP}^2;\mathbf{Z}_4)$ zakładając, że** $H^*(\mathbf{RP}^2;\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[h]/(h^3)$.

41) ♠Niech M będzie zorientowaną zwartą rozmaitością, a N_1 i N_2 zorientowanymi podrozmaitościami. Oznaczmy przez $PD : H^*(M) \to H_{\dim M - *}(M)$ dualność Poincaré oraz $i_k : N_k \to M$ włożenia. Załóżmy, że N_1 i N_2 są transwersalne, i niech $i_{12} : N_1 \cap N_2 \to M$ będzie włożeniem. Udowodnić

$$PD^{-1} i_{1*}([N_1]) \cup PD^{-1} i_{2*}([N_2]) = PD^{-1} i_{12*}([N_1 \cap N_2])$$

42) ♠Niech M będzie rozmaitością 4-wymiarową z zadaną orientacją, $\dim M = 4m$. Forma przecęć jest zadana na $H^{even}(M)$ przez $(a,b) \mapsto \iota_*((a \cup b) \cap [M]) \in H_0(pt) = \mathbf{Z}$. Pokazać rę sygnatura formy na $H^{even}(M)$ jest równa sygnaturze formy na $H^{2m}(M)$. Udowodnić, że sygnatura formy przecięć w $H^{even}(M)$ jest homomorfizmem z pierścienia bordyzmów do $\mathbf{Z}$.