Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Jan Rudnik
Nr albumu: 214666

Zastosowanie twierdzenia Duistermaata–Heckmana do obliczania objętości Grassmannianów

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Andrzeja Webera
Instytut Matematyki UW

Październik 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Tematem pracy jest opis metody obliczania objętości Grassmannianów zespolonych wykorzystującej twierdzenie Duistermaata-Heckmana (tw. 2.1.6). Opisujemy również metodę obliczania tych objętości, w której wykorzystuje się diagramy Younga. Z porównania wzorów ogólnych otrzymanych obiema metodami dostajemy ciekawe tożsamości kombinatoryczne znajdujące się w podrozdziałach 3.2 i 3.3.

Słowa kluczowe

Grassmannian, lokalizacja, tw. Duistermaat–Heckman

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

58F05 Hamiltonian and Lagrangian systems; symplectic geometry
14M15 Grassmannians, Schubert varieties, flag manifolds

Tytuł pracy w języku angielskim

Application of Duistermaat–Heckman theorem to calculating Grassmannian's volumes

Spis treści

Wprowadzenie

Motywacją do napisania tej pracy, jest przykład z książki [McD-S, Remark 5.53(v)]. Obliczono w nim objętość n wymiarowej zespolonej przestrzeni rzutowej za pomocą twierdzenia Duistermaata–Heckmana. Zainteresowała nas formuła kombinatoryczna, która pozwoliła przedstawić skomplikowaną sumę pochodzącą z twierdzenia DH w prostej postaci. Pojawiła się myśl, czy nie udałoby się uzyskać pewnych ciekawych formuł kombinatorycznych tą samą drogą dla rozmaitości Grassmanna (naturalnego uogólnienia idei przestrzeni rzutowej). A zatem obliczone zostaną te objętości na dwa sposoby. Pierwszy raz korzystając z twierdzenia DH, a drugi opierając się na idei diagramów Younga zawartej w [Fu]. Samo twierdzenie DH osadzone jest w świecie geometrii symplektycznej. Wydaje się zatem naturalne wykonanie podobnych obliczeń dla Grassmannianu Lagrange'a. Tutaj druga metoda metoda obliczenia objętości pochodzi w całości z pracy [Hi].

Formuły uzyskane za pomocą twierdzenia DH zostały pracowicie prze mnie wyliczone i wielokrotnie sprawdzane również za pomocą programu Mathematica (używałem wersji 6). Część A dodatku zawiera kody programów. W części B natomiast zamieściłem wyniki liczbowe dla nisko wymiarowych przypadków. Niestety metoda obliczania objętości korzystająca z twierdzenia DH jest bardzo mało efektywna, co szczególnie widać przy Grassmannianie Lagrange'a gdzie obliczenie przypadku 11-wymiarowego zajmuje komputer przez dłuższy czas. Formuły otrzymane za [Fu] i [Hi] cechują się znacznie mniejszą złożonością obliczeniową. Optymalizacja algorytmów obliczeniowych nie była jednak celem tej pracy.

Przejdziemy teraz do bardziej szczegółowego omówienia poniższej pracy. W pierwszym rozdziale wprowadzone zostanie pojęcie ekwiwariantnej teorii kohomologii Borela, a następnie zostanie zdefiniowany model Cartana. Warto zauważyć, że przypomina to trochę sytuacje kohomologii singularnych i twierdzenia de Rhama. Mamy teorię kohomologii określoną na kategorii przestrzeni topologicznych (z działaniem grupy G), a po zawężeniu się do sytuacji rozmaitości różniczkowej jesteśmy w stanie wyrazić te kohomologie w języku form różniczkowych (w odróżnieniu od twierdzenia de Rhama potrzebujemy jeszcze pewnych informacji o działaniu grupy G). W dalszej części pracy będziemy posługiwali się modelem Cartana dla przypadku gdy $G = S^1$. Następnie przypomnimy twierdzenie o lokalizacji pozwalające odczytać pewne informacje (a dokładnie beztorsyjny składnik) kohomologii przestrzeni z kohomologii zbioru punktów stałych. Przetłumaczymy również to twierdzenie na język form różniczkowych, tak by jasne stały się związki z twierdzeniem Duistermaata–Heckmana a zaprezentowanym w następnym rozdziale.

Rozdział drugi zaczniemy od zdefiniowania funkcji Morse'a oraz opisu sytuacji kiedy hamiltonian działania jest funkcją Morse'a. Pozostała część tego rozdziału została przeznaczona na sformułowanie i dowód twierdzenia DH. W podsumowaniu rozdziału opiszemy jeszcze inny sposób patrzenia na to twierdzenie - jak na twierdzenie o ekspotencjale pewnej formy.

W trzecim rozdziale zajmiemy się już konkretnymi obliczeniami. Wprowadzimy wygodny system współrzędnych na Grassmannianie. Korzystając z zanurzenia Plückera wprowadzimy na Grassmannianie łatwe do opisu działanie okręgu oraz, posiłkując się literaturą, wskażemy odpowiadającą mu funkcje Hamiltona. Dzięki wprowadzonemu opisowi oraz wyborowi działania łatwe będzie również odnalezienie zbioru punktów stałych i odpowiednie go opisanie. Następnie korzystając z rozpadu Grassmannianu na przestrzenie liniowe pokażemy jak należy wyliczać liczby Eulera w punktach stałych. Podamy również wzór ogólny na objętość Grassmannianu m-wymiarowych podprzestrzeni w przestrzeni n-wymiarowej.

W następnej części zajmiemy się odmiennym podejściem do tego samego zagadnienia. Wprowadzimy pojęcie diagramu Younga i pokażemy jego związek z obliczaniem kohomologii Grassmannianu. Następnie korzystając z czysto kombinatorycznych metod operacji na diagramach (formuły Pierri oraz formuły Haków) ponownie otrzymamy jawny wzór na objętość Grassmannianu.

W ostatniej części tego rozdziału zajmiemy się przypadkiem Grassmannianu Lagrange'a. Przypomnimy konieczne pojęcia geometrii symplektycznej. Odpowiednio dobrane działanie S^1 oraz wykorzystanie poprzedniego modelu Grassmannianu z drobnymi modyfikacjami, pozwoli obliczyć objętość korzystając z twierdzenia DH. Na samym końcu zaprezentujemy jeszcze wzór otrzymany w [Hi].

W Dodatku przedstawiam kody programów, które bardzo ułatwiły mi osiągnięcie ostatecznych wyników. Dzięki eksperymentom komputerowym bardzo szybko byłem w stanie odrzucić błędne wzory, choć sam program Mathematica również sprawiał pewne trudności. Największym problemem technicznym w czasie tych eksperymentów jest nieliniowo rosnąca liczba punktów stałych (ilość składników w szukanej sumie) co uniemożliwiło obliczenie metodą DH objętości wysokowymiarowych Grassmannianów. Metody wykorzystujące rachunek Schuberta były bardziej efektywne. Mógłbym podać tu objętość $Gr_{50}(100)$ jednak liczba ta zajęła kilka stron pracy.

Rozdział 1

Ekwiwariantna teoria kohomologii

1.1. Model Cartana

Definicja 1.1.1. *Niech G będzie grupą Lie.* Wiązką uniwersalną *EG nazwiemy przestrzeń ściągalną, na której G działa wolno (w przypadku G nie zwartej grupy trzeba założyć również istnienie ilorazu takiego, że odwzorowanie $EG \to EG/G$ jest rozwłóknieniem). Wiązka EG jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homotopii.*

Definicja 1.1.2. *Niech m będzie przestrzenią topologiczną, a G grupą Lie działającą na M.* Ekwiwariantną teorię kohomologii Borela *definiujemy w następujący sposób,*

$$H_G^*(M) = H^*((M \times EG)/G).$$

Ponieważ jednak nie będziemy zajmowali się tu tak ogólnym przypadkiem, po szczegółowy opis oraz pewne podstawowe własności ekwiwariantnej teorii kohomologii odsyłam do [At-Bo, § 2].

W przypadku gdy, M jest rozmaitością różniczkową możemy posłużyć się wygodnym abstrakcyjnym modelem realizującym te postulaty. Zdefiniujemy poniżej model Cartana.

Definicja 1.1.3. Modelem Cartana *nazywamy kompleks $C_G(M)$ określony następująco*

$$C_G^*(M) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M))^G,$$

gdzie $S(\mathfrak{g}^*)$ oznacza potęgę symetryczną przestrzeni liniowej sprzężonej do algebry Liego grupy G, a $\Omega^*(M)$ oznacza pierścień form różniczkowych na rozmaitości M. Działanie grupy G na tym kompleksie pochodzi od reprezentacji dołączonej na pierwszym czynniku oraz od przesunięć na drugim. Różniczkę w powyższym kompleksie definiujemy na elemencie $s \otimes \xi \in (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M))^G$ następująco

$$\mathrm{d}_G(s \otimes \xi) = \sum_{i=1}^{n} s\mu_i \otimes \iota(x_i)\xi,$$

gdzie $\{x_1, \dots, x_n\}$ jest bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$, natomiast $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ jest bazą sprzężoną w $\mathfrak{g}^*$.

Twierdzenie 1.1.4 ([Gu-St, Theorem 4.2.1])**.** *Kohomologie tego kompleksu są takie same jak G-ekwiwariantne kohomologie przestrzeni M .*

W szczególnym przypadku, gdy $G = S^1$ model Cartana przyjmuje postać

$$C_{S^1}^*(M) = (\Omega^*(M))^{S^1}[h].$$

Jest więc pierścieniem wielomianów zmiennej h, którego współczynnikami są nieimiennicze formy różniczkowe, h jest przy tym elementem drugiej gradacji. Dzieje się tak dlatego, że S^1 jest grupą przemienną a zatem jej reprezentacja dołączona jest trywialna. Różniczka w tym przypadku ma postać $\mathrm{d}_h = \mathrm{d} + \iota(X)h$, gdzie X jest polem wektorowym generowanym przez działanie okręgu.

1.2. Twierdzenie o lokalizacji

Przypomnimy najpierw twierdzenie o lokalizacji dla ekwiwariantnej teorii kohomologii Borela. Rozpatrzymy w nim homomorfizm indukowany przez włożenie $M^G \hookrightarrow M$ i jego zachowanie przy zlokalizowaniu przez pewien podzbiór multiplikatywny $D \subset H_G(pt)$. Wprowadźmy oznaczenie.

Oznaczenie. *Niech F będzie rodziną podgrup domkniętych grupy Lie'go G zamkniętą ze względu na branie domkniętych podgrup. Wtedy przez M^F oznaczymy zbiór $\{x \in M : G_x \notin F\}$.*

Twierdzenie 1.2.1 ([Jac, Twierdzenie 3.1.1])**.** *Niech F będzie rodziną podgrup grupy Liego $G = (S^1)^n$ i niech teoria H_G^* będzie ekwiwariantną teorią Borela. Wtedy dla każdej zwartej G-przestrzeni M następujące warunki są równoważne*

(1) *homomorfizm indukowany przez włożenie $D^{-1}H_G^*(M) \to D^{-1}H_G^*(M^F)$ jest izomorfizmem,*

(2) $D^{-1}H_G^*(G/H) = 0$ *dla wszystkich $H \in F$.*

Uwaga. *Wynikanie (2) $\Rightarrow$ (1) w nieco wersji mniej ogólnej (dla $G = T$ oraz F rodzinie wszystkich nietrywialnych podgrup można znaleźć w* [At-Bo, Theorem 3.5]. *Przytoczymy tu jego treść. Właśnie z takiego sformułowania będziemy korzystali w tej pracy.*

Twierdzenie 1.2.2 ([At-Bo, Theorem 3.5])**.** *Niech T będzie torusem, wtedy jądro i kojądro odwzorowania i^* indukowanego przez włożenie*

$$i^* : H_T^*(M) \to H_T^*(M^T),$$

są torsyjne.

Zatem po podzieleniu obu stron przez h^{-1} (a więc zabiciu torsji) dostajemy izomorfizm o którym mowa w twierdzeniu ogólnym.

Spróbujemy teraz tak przetłumaczyć twierdzenie o lokalizacji, by łatwo widoczne były związki pomiędzy nim a twierdzeniem Duistermaata–Heckmana.

Weźmy odwzorowanie $I : H_{S^1}^n(M) \to \mathbb{R}$ ([At-Bo, (2.14)]) zadane, przez ewaluacje na cyklu podstawowym (zadane wzorem $I(\tau) = \int_M \tau_n$, gdzie $\tau = \sum_{k=0}^m \tau_k h^{m-k}$). Rozszerzymy je teraz do odwzorowania $H_{S^1}^*(M) \to \mathbb{R}[h]$. Dowolny element $\tau \in C_{S^1}^*(M)$ w modelu Cartana jest postaci

$$\tau = \sum_{k=0}^m \tau_k h^{m-k}.$$

Zadajmy zatem

$$I(\tau) = \left(\int_M \tau_n\right) h^{m-n} \in \mathbb{R}[h].$$

Udowodnijmy, że odwzorowanie I jest dobrze określone na klasach kohomologii oraz, że jest morfizmem nad modułem $H^*_{S^1}(*) = \mathbb{R}[h]$. Niech $\tau = d_h\eta$, wtedy

$$I(\tau) = \left(\int_M \tau_n\right) h^{m-n} = \left(\int_M d\eta_{n-1} + \iota(X)\eta_{n+1}\right) h^{m-n} = \int_{\partial M} \eta_{n-1} = 0.$$

Trzecia równość wynika z braku form gradacji $n+1$, natomiast czwarta z zamkniętości rozmaitości M. Ponieważ odwzorowanie to jest zadane przez całkę jest $\mathbb{R}$-liniowe wystarczy zatem pokazać przemienność z mnożeniem przez h

$$I(h\tau) = \left(\int_M h\tau_n\right) h^{m-n} = \left(\int_M \tau_n\right) h^{m-n+1} = hI(\tau).$$

Po zlokalizowaniu zbiorem $D = \{h, h^2, \dots\}$ i zastosowaniu twierdzenia o lokalizacji dla F będącej rodziną wszystkich właściwych podgrup G (a zatem $M^F = M^{S^1}$) otrzymujemy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} D^{-1}H^*_{S^1}(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\simeq p"'] & D^{-1}\mathbb{R}[h] = \mathbb{R}[h, h^{-1}] \\ D^{-1}H^*_{S^1}(M^{S^1}), & \end{tikzcd}$$

gdzie izomorfizm p jest indukowany przez włożenie $i : M^{S^1} \hookrightarrow M$. Zatem $I(\tau)$ zależy tylko od wartości $\tau|_{M^{S^1}}$. W przypadku gdy zbiór punktów stałych jest dyskretny wiemy, że jeśli obcięcie $p(\tau) = 0$ to całka $I(\tau) = 0$. Gdy dodatkowo M jest rozmaitością symplektyczną, a forma $\tau = (\omega)^n$ twierdzenie Duistermaata–Heckamna, którego dowód podamy w następnym rozdziale, przedstawi jawną formułę na $I(\tau)$ korzystającą jedynie z postaci obcięcia formy τ do zbioru punktów stałych.

Rozdział 2

Twierdzenie Duistermaata–Heckmana

2.1. Twierdzenie Duistermaata–Heckmana

Niech V będzie $2n$-wymiarową przestrzenią liniową wyposażoną w dwuliniową, antysymetryczną, niezdegenerowaną formę zamkniętą ω. Taką parę (V,ω) będziemy nazywali przestrzenią symplektyczną. Rozmaitością symplektyczną będziemy nazywali parę (M,ω) gdzie M będzie gładką rozmaitością natomiast $\omega \in \Omega^2(M)$ taką, że dla każdego $x \in M$ para $(T_xM, \omega|_x)$ jest przestrzenią symplektyczną oraz $d\omega = 0$.

Przedstawimy tu dowód w języku form różniczkowych. Postaramy się również pokazać związki z przytoczonym twierdzeniem o lokalizacji. Oba twierdzenia mówią o możliwości odczytania pewnych informacji na temat kohomologii przestrzeni na podstawie kohomologii zbioru punktów stałych.

Niech M będzie symplektyczną rozmaitością różniczkową.

Definicja 2.1.1. *Niech $H : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, której odpowiada pole wektorowe X, tzn. $\mathrm{d}\,H = \iota(X)\omega$. Niech teraz pole wektorowe X generuje działanie S^1 na M, czyli przekształcenie pływu e^tX jest 1-okresowe. W takim przypadku H będziemy nazywali* Hamiltonianem działania okręgu *na rozmaitości M.*

Uwaga 2.1.2. *Działanie S^1 na T_pM, gdzie $p \in M^{S^1}$ jest sprzężone z n-krotnym produktem działania S^1 na $\mathbb{C}$ zadanego wzorem $z \mapsto e^{-2\pi i k_j t}z$ dla $t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Zdefiniujmy $e(p) = k_1 \dots k_n$. Liczby $k_1, \dots, k_n$ nazwiemy wagami działania.*

Definicja 2.1.3. Funkcją Morse'a *nazywamy $f : M \to \mathbb{R}$ taką, że w każdej lokalnej mapie $\mathrm{d}\,f \neq 0$ lub $Hf \neq 0$ (Hessian funkcji f równy* $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$*).*

Uwaga 2.1.4. *Wiadomo, że funkcja f jest funkcją Morse'a wtedy i tylko wtedy, gdy w pewnej lokalnej mapie ma postać $f(x) = f(b) - x_1^2 - \dots - x_j^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2$*

Z postaci funkcji Morse'a wynika, że wszystkie jej zera są izolowane. Jeśli f jest Hamiltonianem pewnego działania to zera tej funkcji odpowiadają punktom stałym tego działania. Jeśli więc Hamiltonian działania jest funkcją Morse'a to zbiór punktów stałych tego działania jest dyskretny.

Prawdziwe jest również stwierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 2.1.5. *Jeśli hamiltonowskie działanie S^1 na rozmaitości ma dyskretny zbiór punktów stałych, to H jest funkcją Morse'a.*

Dowód. Z wcześniejszej **Uwagi 2.1.2** wiemy, jaką postać przyjmuje takie działanie na przestrzeni stycznej do punktów stałych. Wystarczy zająć się więc obrotem na $\mathbb{C}$. Rozpatrzymy obrót o okresie T, a więc prędkości obrotu równika $2\pi/T$ (taki obrót odpowiada wadze $k = 1/T$). Pole wektorowe X generujące taki obrót ma postać $X_{(x+iy)} = 2k\pi(-y + ix)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, różniczka hamiltonianu na wektorze $v \in T_{(x+iy)}\mathbb{C}$ jest więc zadana wzorem

$$\mathrm{d}\, H_{(x+iy)}(v_1 + iv_2) = \iota(X_{(x+iy)})\omega(v_1 + iv_2) = 2k\pi(xv_1 + yv_2),$$

gdzie ω jest standardową formą symplektyczną na $\mathbb{C}$ zadaną formą $1/2i \,\mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, \bar{z}$. Otrzymujemy jawny wzór na hamiltonian tego działania

$$H(z_1 + iz_2) = k\pi(z_1^2 + z_2^2) + c,$$

gdzie c jest pewną stałą. A zatem skoro działanie na T_pM jest sumą składników o pewnych wagach, to Hamiltonian całego działania jest również zadany sumą kwadratów współrzędnych z odpowiadającymi im wagami. Pozostaje jedynie przeniesienie określonego w ten sposób Hamiltonianu na rozmaitość, co można zrobić używając choćby ekwiwariantnego przekształcenia wykładniczego. I na mocy **Uwagi 2.1.4** H jest funkcją Morse'a. $\square$

Teraz zakładamy, że rozmaitość M jest zwarta.

Twierdzenie 2.1.6 (Duistermaat–Heckman). *Niech $H : M \to \mathbb{R}$ będzie Hamiltonianem działania okręgu na rozmaitości M. Jeśli zbiór punktów stałych działania jest dyskretny oraz $k \geqslant n$, to*

$$\binom{k}{n} \int_M (-H)^{k-n} \omega^n = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{(-H(p))^k}{e(p)}.$$

Poniższy dowód pochodzi z [McD-S, Theorem 5.5], uzupełnimy go o drobne szczegóły. Zanim przejdziemy do tego dowodu zaprezentujemy podstawowy przykład oraz udowodnimy dwa lematy.

Przykład 2.1.7. Rozpatrzmy S^2 z działaniem S^1 poprzez standardowy obrót z wagą k, tzn. zadany polem wektorowym

$$X(x, y, z) = 2k\pi(-y, x, 0).$$

Standardowa forma powierzchni na S^2 ma postać

$$\omega = z \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y - y \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, z + x \,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z,$$

po rozwikłaniu współrzędnej z korzystając z faktu, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, a zatem

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad \text{oraz } \mathrm{d}\, z = \frac{-x \,\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{-y \,\mathrm{d}\, y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

otrzymujemy formę

$$\omega = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y + \frac{y^2 \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{x^2 \,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Zatem różniczka Hamiltonianu przyjmuje postać

$$\mathrm{d}\, H = \iota(X)\omega = 2k\pi \left(\frac{-y \,\mathrm{d}\, y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{-x \,\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right),$$

a sam Hamiltonian ma postać

$$H(x,y,z) = 2k\pi\sqrt{1-x^2-y^2} + c = 2k\pi z + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Należy jeszcze obliczyć funkcje e w biegunach, ponieważ pole X obiega oś z w dodatnim kierunku, a orientacja na sferze wyznaczona jest przez wektor normalny. Otrzymujemy $e((0,0,1)) = -k$ oraz $e((0,0,-1)) = k$, (przypominamy, że przy definicji funkcji e w wykładniku znajdował się minus). Podstawiając wszystkie powyższe rachunki do wzoru otrzymujemy

$$\int_{S^2} \omega = \left(\frac{-2\pi}{T(-k)} - cT\right) + \left(\frac{2\pi}{T(k))} + cT\right) = 4\pi.$$

Lemat 2.1.8. *Niech*

$$\tau = \tau_{2n} + h\tau_{2n-2} + \cdots + h^n\tau_0,$$

gdzie $\tau_k \in \Omega^k(M)$ *będzie* d_h*-zamkniętą* $2n$*-formą taką, że* τ_0 *znika na punktach stałych działania* S^1*. Wtedy* τ *jest formą* d_h*-dokładną, a w szczególności*

$$\int_M \tau_{2n} = 0.$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że działanie nie ma punktów stałych. Niech X będzie polem wektorowym generowanym przez H (tzn. $\mathrm{d}\,H = \iota(X)\omega$). Istnieje wtedy 1-forma

$$\alpha_x(v) = \frac{< X_x, v >}{\|X_x\|^2},$$

taka, że $\iota(X)\alpha = 1$ oraz $\iota(X)\,\mathrm{d}\,\alpha = 0$ (przy założeniu niezmienniczości iloczynu skalarnego, którą można uzyskać uśredniając po całej grupie). Pierwsza równość jest oczywista. Drugą otrzymujemy następująco. Wiemy, że

$$\mathcal{L}_X\alpha = \iota(X)\,\mathrm{d}\,\alpha + \mathrm{d}(\iota(X)\alpha) = \iota(X)\,\mathrm{d}\,\alpha = \iota(X)\,\mathrm{d}\,\alpha,$$

natomiast równość $\mathfrak{L}_X\alpha = 0$ jest równoważna temu, że przekształcenie $t \mapsto (e^{tX})^*\alpha \in \Omega^2(M)$ jest stałe (czyli $\phi^*\alpha = \alpha$, co wynika bezpośrednio z niezmienniczości iloczynu skalarnego).

Ponieważ $\mathrm{d}_h\,\tau = 0$, to wszystkie jej współczynniki znikają. Mamy zatem

$$\mathrm{d}\,\tau_{2k-2} + \iota(X)\tau_{2k} = 0.$$

Zdefiniujemy indukcyjnie formę $\sigma = \sigma_{2n-1} + h\sigma_{2n-3} + \cdots + h^{n-1}\sigma_1$ następująco

$$\sigma_1 = \tau_0\alpha, \quad \sigma_{2k+1} = \tau_{2k}\wedge\alpha - \sigma_{2k-1}\wedge\mathrm{d}\,\alpha.$$

Pokażemy indukcyjnie, że $\mathrm{d}_h\,\sigma = \tau$. Wiemy, że $\tau_{2k-2} = \mathrm{d}\,\sigma_{2k-3} + \iota(X)\sigma_{2k-1}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\sigma_{2k-1} + \iota(X)\sigma_{2k+1} &= \mathrm{d}(\tau_{2k-2}\wedge\alpha - \sigma_{2k-3}\wedge\mathrm{d}\,\alpha) + i(X)(\tau_{2k}\wedge\alpha - \sigma_{2k-1}\wedge\mathrm{d}\,\alpha)\\
&= \mathrm{d}\,\tau_{2k-2}\wedge\alpha + \tau_{2k-2}\wedge\mathrm{d}\,\alpha - \mathrm{d}\,\sigma_{2k-3}\wedge\mathrm{d}\,\alpha + \iota(X)\tau_{2k}\wedge\alpha + \tau_{2k}\wedge\iota(X)\alpha\\
&\quad - \iota(X)\sigma_{2k-1}\wedge\mathrm{d}\,\alpha - \sigma_{2k-1}\wedge\iota(X)\,\mathrm{d}\,\alpha\\
&= (\mathrm{d}\,\tau_{2k-2} + \iota(X)\tau_{2k})\wedge\alpha + (\tau_{2k-2} - \mathrm{d}\,\sigma_{2k-3} - \iota(X)\sigma_{2k-1})\wedge\mathrm{d}\,\alpha + \tau_{2k}\\
&= \tau_{2k}
\end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że $M^{S^1} \neq \emptyset$. Wiadomo, że zbiór punktów stałych jest podrozmaitością (choć w naszym przypadku jest on nawet dyskretny), a więc istnieje jego otoczenie tubularne

U, które w tym przypadku jest rozłączną sumą otoczeń pojedynczych punktów U_p. Ponieważ U_p są rozłączne, wystarczy zająć się jednym z nich. Niech $\Phi : M \to M$ będzie retrakcją U_p do p izotopijną z identycznością. Ponieważ τ jest formą zamkniętą, to forma $\Phi^*\tau - \tau$ jest dokładna (ponieważ jest zerem w kohomologiach). Forma $\Phi^*\tau$ znika na U_p, ponieważ różniczka przekształcenia w punkt znika więc wszystkie gradacje poza zerową znikają, a z faktu, że $\tau_0(p) = 0$ znika całe cofnięcie. Istnieje więc forma σ taka, że $d\sigma = \tau$ poza $U = \sum U_p$. Można ją przedłużyć na otoczenie U w taki sposób, że $\sigma|_U \cong 0$.

Zatem ponieważ $\Phi^*\tau - \tau$ oraz $\Phi^*\tau$ są dokładne, to forma τ również musi być dokładna. Korzystając teraz z twierdzenia Stokesa i pamiętając, że rozpatrujemy rozmaitości zamknięte otrzymujemy znikanie całki. □

Pokazaliśmy więc na razie, że jeśli znika obcięcie formy $\tau|_{M^{S^1}}$ do zbioru punktów stałych to znika również całka $I(\tau)$ z pierwszego rozdziału.

Lemat 2.1.9. *Załóżmy, że Hamiltonowskie działanie S^1 na rozmaitości M ma dyskretny zbiór punktów stałych. Wtedy dla każdego punktu stałego p istnieje forma $\tau_p \in \Omega^{2n}_{S^1}(M)[h]$*

$$\tau_p = \tau_{p,2n} + h\tau_{p,2n-2} + \cdots + h^n\tau_{p,0},$$

mająca nośnik w dowolnie małym otoczeniu punktu p taka, że

$$\int_M \tau_{p,2n} = 1, \quad \tau_{p,0}(p) = e(p), \quad d_h\tau_p = 0.$$

Dowód. Wprowadźmy najpierw oznaczenie $\theta = e^{2\pi i t} \in S^1$. Niech teraz $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ będzie niezmienniczym ze względu na działanie S^1 rozbiciem przestrzeni stycznej w punkcie p do rozmaitości M takim, że S^1 działa na L_j przez mnożenie przez θ^{-k_j}. Niech $\phi_j : L_j \to S^2$ będzie gładkim odwzorowaniem przenoszącym 0 w biegun południowy oraz ściągającym dopełnienie kuli jednostkowej w biegun północny nieimienniczym ze względu na powyższe działanie. Przyjmijmy $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ wtedy niezmienniczość ze względu na działanie z wagą k_j przyjmuje postać:

$$\phi_j(\theta^{-k_j}x) = (\theta^{-k_j}\phi_{j\mathbb{C}}(x), \phi_{j\mathbb{R}}(x))$$

dla każdego $x \in L_j$. Niech ω_0 będzie znormalizowaną formą powierzchni sfery. Przyjmijmy $\omega_0 = \omega/4\pi$ (unormowana forma symplektyczna **Przykładzie 2.1.7**), wtedy Hamiltonianem dla działania z wagą 1 przyjmuje postać

$$H_0(x, y, z) = 1/2z + c,$$

przyjmijmy stałą c równą $-1/2$. Tak otrzymany Hamiltonian przeprowadza biegun północny na 0, a biegun południowy na -1.

Forma $\omega_0 - k_j h H_0$ jest zamknięta ze względu na działanie z wagą k_j. Zdefiniujmy

$$\sigma_p = \prod_{j=1}^{n} \phi_j^*(\omega_o - k_j h H_0).$$

Forma σ_p jest określona na T_pM oraz spełnia wszystkie postulaty lematu:

$$\int_{T_pM} \sigma_p = \prod_{j=1}^{n} \int_{S^2} \omega_0 - k_j h H_0 = 1^n,$$

$$\sigma_{p,0}(0) = \prod_{j=1}^{n} \phi_j^*(-k_j H(-1)) = \prod_{j=1}^{n} k_j = e(p)$$

oraz jest zamknięta jako iloczyn form zamkniętych. Pozostało nam tylko uważne przeniesienie tej formy na rozmaitość M. Forma σ_p ma nośnik zawarty iloczynie kartezjańskim dysków jednostkowych (ponieważ dopełnienie takiego dysku każde z ϕ_j posyłało w punkt, a zatem cofnięcie formy na tym dopełnieniu jest zerowe). Jak w poprzednim lemacie otoczenie zbioru punktów stałych jest rozłączną sumą otoczeń pojedynczych punktów U_p. Niech $V_p \subset U_p$ będzie otoczeniem punktu p dyfeomorficznym z T_pM. Możemy teraz przeciągnąć formę σ_p do formy τ_p (na przykład odpowiednio przeskalowanym ekwiwariantnym przekształceniem wykładniczym $\underline{\exp}$, tak by $\underline{\exp}(\operatorname{supp}\sigma_p) \subset V_p$). Forma τ_p jest określona w ten sposób na V_p i przedłużona na M przez 0. □

Uwaga. *Warto zwrócić uwagę, że w powyższym lemacie poza samym dowodem zadbaliśmy również o to, by forma $\sum_p \tau_p$ miała odpowiednie własności (by nośniki τ_p były rozłączne dla różnych punktów p).*

Dowód. (Tw. Duistermaat–Heckman) Określimy formę σ następująco

$$\sigma = h^{n-k}(\omega - hH)^k - \sum_p \frac{(-H(p))^k}{e(p)}\tau_p,$$

gdzie τ_p jest formą skonstruowaną w poprzednim lemacie. Rozważmy przez chwilę składnik

$$h^{n-k}(\omega - hH)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(-hH)^{k-i}\omega^i h^{n-k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(-H)^{k-i}\omega^i h^{n-i}.$$

Wszystkie składniki tej sumy dla $i > n$ są równe zero, ponieważ nie istnieją formy w gradacji przekraczającej wymiar rozmaitości, a zatem mimo, że a priori mamy do czynienia z wielomianem Loranta zmiennej h klasa $\sigma \in \Omega^{2n}_{S^1}(M)[h, h^{-1}]$ ma tylko niezerowe współczynniki przy dodatnich potęgach h. Zauważmy ponadto, że $d_h\sigma = 0$ ponieważ zarówno τ_p i $\omega - hH$ są zamknięte. Sprawdźmy $d_h(\omega - hH) = d\omega + \iota(X)\omega h - dHh - \iota(X)Hh^2 = 0$ (ostatnia równość wynika z faktu, że H jest Hamiltonianem działania okręgu na rozmaitości M). Pokażemy teraz, że σ_0 znika w punktach stałych. Istotnie

$$\sigma_0(p) = H^k(-1)^k - \frac{(-H(p))^k}{e(p)}e(p) = 0$$

Na mocy poprzedniego lematu widać, że całka z σ_{2n} znika dla $k \geqslant n$. Mamy

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \sigma_{2n} &= \int_M \binom{k}{n}\omega^n(-H)^{k-n} - \sum_p \frac{(-H(p))^k}{e(p)}\tau_{p,2n} \\ &= \binom{k}{n}\int_M \omega^n(-H)^{k-n} - \sum_p \frac{(-H(p))^k}{e(p)}\int_M \tau_{p,2n}, \end{aligned}$$

i po przekształceniu otrzymujemy żądaną równość

$$\binom{k}{n}\int_M (-H)^{k-n}\omega^n = \sum_{p\in M^{S^1}} \frac{(-H(p))^k}{e(p)}.$$

□

Wniosek. *Zauważmy, że dla $k = n$ lewa strona nie zależy od wyboru Hamiltonianu H, a zatem również prawa strona musi być od tego wyboru niezależna. Wiemy, że funkcja Hamiltona zmieniona o stałą generuje to samo działanie na rozmaitości. Porównując prawe strony dla H oraz $H + c$ dostajemy*

$$\sum_p \frac{(-H(p))^n}{e(p)} = \sum_p \frac{(-H(p)+c)^n}{e(p)} = \sum_p \frac{(-H(p))^n}{e(p)} + \sum_p \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-H(p))^k c^{n-k-1}}{e(p)},$$

a zatem

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} c^{n-k-1} \sum_p \frac{(-H(p))^k}{e(p)} = 0 \qquad \textit{dla każdego } c \in \mathbb{R}.$$

Musi to więc być wielomian zerowy, czyli

$$\sum_p \frac{(-H(p))^k}{e(p)} = 0 \qquad \textit{dla każdego } k < n.$$

Korzystając z powyższego wyniku jesteśmy w stanie przedstawić formułę DH w nieco łatwiejszej do zapamiętana formie. Poczynając od formuły

$$\int_M (\omega - hH)^k = \sum_p \frac{(-hH(p))^k}{h^n e(p)},$$

a następnie dzieląc przez $k!$ i sumując po wszystkich k otrzymujemy

$$\int_M e^{\omega - hH} = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{e^{-hH(p)}}{h^n e(p)},$$

Powyższy wzór musi być jednak rozumiany czysto formalnie, to znaczy wyłącznie jako równość współczynników przy odpowiednich wykładnikach h.

Rozdział 3

Zastosowania formuły DH do rachunku Schuberta

3.1. Objętość Grassmannianu korzystając z formuły DH

W tej części wykorzystamy twierdzenie Duistermaata–Heckmana do obliczenia objętości zespolonej rozmaitości Grassmanna. Przedstawimy najpierw oznaczenia jakimi będziemy się posługiwać. Każdy punkt przestrzeni $V \in Gr_m(\mathbb{C}^n)$ jest m wymiarową przestrzenią liniową zawartą w $\mathbb{C}^n$. Niech $V = \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_m)$. Macierz współrzędnych wektorów bazowych ma postać

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \cdots & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Przyjmijmy dla uproszczenia notacji $N = \binom{n}{m}$. Niech $\bar{\sigma} = (\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1})$ będzie ustalonym uporządkowaniem wszystkich m elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$. Przez $\sigma_k(i)$ będziemy oznaczali i-ty (w porządku rosnącym) element zbioru σ_k. Niech $m(\sigma_i)$ oznacza minor rzędu m macierzy reprezentującej V zadany przez kolumny o numerach ze zbioru σ_i.

Definicja 3.1.1. Zanurzeniem Plückera *nazwiemy odwzorowanie* $\rho_{\bar{\sigma}} : Gr_m(n) \to \mathbb{CP}^{N-1}$ *zadane formułą*

$$\rho_{\bar{\sigma}}(X) = [m(\sigma_0) : \cdots : m(\sigma_{N-1})].$$

Jest ono dobrze określone ponieważ wiadomo, jak zachowuje się wyznacznik ze względu na operacje elementarne (niezmienniczo ze względu na dodawanie wierszy oraz liniowo ze względu na mnożenie wierszy przez stałą). Niech teraz $V = Lin(kv_1, v_2, \dots, v_m)$ *wtedy*

$$\rho_{\bar{\sigma}}(X) = [km(\sigma_0) : \cdots : km(\sigma_{N-1})] = [m(\sigma_0) : \cdots : m(\sigma_{N-1})].$$

Rozważmy następujące działanie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ na $\mathbb{C}^n$ określone, przez $z(v_1, \dots, v_n) = (z^0 v_1, z^1 v_2 \dots, z^{m-1} v_m)$, które indukuje działanie na $Gr_m(n)$. To działanie rozszerza się do działania na $\mathbb{C}P^{N-1}$ określonego wzorem

$$z[v_0 : \cdots : v_{N-1}] = \left[z^{\sum \sigma_1} v_0 : \cdots : z^{\sum \sigma_{N-1}} v_{N-1}\right].$$

Fakt. *Punkt* p_i *jest punktem stałym wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\rho_{\bar{\sigma}}(p_i) = \epsilon_i$$

dla pewnego $i \in \{1, \dots, N\}$.

Dowód. Używając operacji elementarnych możemy tak przekształcić współrzędne punktu stałego, by w każdym wierszu jedynka stała na pierwszej niezerowej wpółrzędnej, oraz pod każdą jedynką znajdowały się same zera tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Ponieważ na każdej kolumnie działamy z inną wagą (a takie przedstawienie jak powyżej jest jednoznaczne), to w każdym wierszu współrzędnych punktu stałego występuje dokładnie jedna jedynka. W takim przypadku istnieje dokładnie jeden niezerowy minor. □

Warunek ten określa jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy punktami stałymi działania, a zbiorami σ_i.

Wprowadźmy teraz na Grassmanianie formę symplektyczną ω poprzez cofnięcie standardowej formy symplektycznej określonej na przestrzeni rzutowej przekształceniem Plückera. Unormujmy ponadto formę ω tak, by $\int_{\mathbb{C}P^1} \omega = 1$ dla $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{CP}^{N-1}$. Znając działanie oraz mając zadaną formę symplektyczną jesteśmy w stanie podać funkcję Hamiltonian tego działania na $\mathbb{CP}^{N-1}$. Jest ona wyznaczona w [Kir, Example 3.5.], przytoczymy tu jego postać

$$H([z_0 : \dots : z_{N-1}]) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} |z_k|^2 \sum \sigma_k}{\sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2},$$

Znajdziemy teraz wzór na funkcję e występującą w twierdzeniu DH. Przypomnijmy, że dla każdego punktu p stałego jej wartość jest równa iloczynowi odpowiednich wag działania na przestrzeni stycznej $T_pGr_m(n)$. Korzystając z faktu, że Grassmannian można przedstawić jako sumę przestrzeni liniowych A_{σ_k}, gdzie A_{σ_k} jest niezmiennicza ze względu na działanie okręgu, to działanie jest liniowe na A_{σ_k}. Przestrzeń styczną w punkcie p_k można utożsamiać z przestrzenią A_{σ_k} macierzy $m \times n$ postaci

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \sigma_k(1) & & \sigma_k(i) & & \sigma_k(m) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} * & \dots & 1 & \dots & \delta_{1,i} & \dots & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \delta_{2,i} & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & 0 & \dots & \delta_{m,i} & \dots & 1 & \dots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Procedura obliczenia funkcji e będzie następująca: weźmiemy dowolny punkt z przestrzeni stycznej do p_k i zadziałamy na nim S^1. Następnie unormujemy tak, by ponownie być w tych samych współrzędnych przestrzeni stycznej i wtedy obliczymy iloczyn wag. Zilustrujemy powyższą procedurę przykładem dla $n = 4$, $m = 2$, $p_k = (1, 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & c & 1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{działanie}} \begin{pmatrix} 1 & \theta a & 0 & \theta^3 b \\ 0 & \theta c & \theta^2 & \theta^3 d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normalizacja}} \begin{pmatrix} 1 & \theta a & 0 & \theta^3 b \\ 0 & \theta^{-1} c & 1 & \theta d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{wagi}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ostatnia macierz powstaje już czysto formalnie przez wypisanie wag niezbędnych do obliczenia $e(p_k)$. Podamy teraz ten sam wzór w postaci ogólniej

$$e(p_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m} (-1)^{\sigma_k(j)_k - i} (\sigma_k(j) - 1)!(n - \sigma_k(j))!}{\prod_{a<b} (\sigma_k(b) - \sigma_k(a))^2}.$$

Poniższa macierz jest macierzą wag dla punkty stałego p_k,

$$\begin{array}{cl}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & \overset{\sigma_k(1)}{\downarrow} & & & & \overset{\sigma_k(j)}{\downarrow} & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
-(\sigma_k(1)-1) & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdot & 0 & \cdot & \cdots & n-\sigma_k(1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-(\sigma_k(j)-1) & \cdots & \cdot & 0 & \cdot & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & n-\sigma_k(j) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

wartość $e(p_k)$ jest iloczynem wszystkich niezerowych elementów tej macierzy.

Poniższy kod (programu Mathematica) pozwala dla wektora $v = (\sigma_k(1), \ldots, \sigma_k(m))$ oraz ustalonej liczby naturalnej n obliczyć wartości funkcji $e(p_k)$ w odpowiadającym σ_k punkcie stałym $Gr_m(n)$. Ten i pozostałe kody, jak również kilka początkowych wyników można znaleźć w Dodatku.

```
e[v_,n_]:=Product[(-1)^(v[[i]]-i)(v[[i]]-1)!(n-v[[i]])!,
{i,Length[v]}]/Product[Product[(v[[i]]-v[[j]])^2,{j,i-1}],{i,Length[v]}]
```

Możemy teraz obliczyć objętość $Gr_m(n)$,

$$Vol(Gr_m(n)) = \sum_{p \in Fix} \frac{(-H(p))^{m(n-m)}}{e(p)} = \sum_{0<i_1<\cdots<i_m \leqslant n} \frac{(-\sum_{k=1}^m i_k)^{m(n-m)} \prod_{k<l} (i_l - i_k)^2}{\prod_{k=1}^m (-1)^{i_k - i}(i_k - 1)!(n - i_k)!}.$$

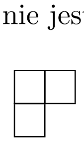
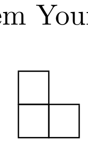
3.2. Objętość Grassmannianu za pomocą rachunku Schuberta

Objętość Grassmannianu możemy obliczyć również w inny sposób, na podstawie wyników zawartych w [Fu]. Idea polega na wykorzystaniu równości pomiędzy liczbie podziałów liczby d, a wymiarem $H^d(Gr_m(n))$.

Przypomnijmy, że generatory $2d$-tych kohomologii Grassmannianu są indeksowane komórkami odpowiedniego wymiaru. Te z kolei są indeksowane podziałami liczby d, które można przedstawić w postaci diagramów Younga.

Definicja 3.2.1. N*iech $d = d_1 + \cdots + d_l$ będzie podziałem liczby d (przy czym $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_l$).* Diagramem Younga *dla tego podziału nazywamy układ klatek, w którym j-ty wiersz zawiera dokładnie d_j klatek dla $j = 1, \ldots, l$.*

Pierwszy diagram jest poprawnym diagramem odpowiadającym podziałowi $(2, 1)$ (wygodna konwencja zapisu), drugi nie jest diagramem Younga.

 dobrze  źle

W dowolnym Grassmannianie (przy standardowym podziale na komórki) istnieje dokładnie jedna komórka wymiaru zespolonego 1 (istnieje dokładnie jeden podział liczby 1). Niech $s_1 \in H^2(Gr_m(n))$ będzie klasą kohomologii sprzędzoną do klasy homologii zadanej przez odwzorowanie charakterystyczne tej komórki. Oznaczmy przez $s_{m(n-m)}$ klasę kohomologii odpowiadającą(w ten sam sposób) komórce wymiaru $m(n-m)$ (maksymalnego). Odpowiadający jej diagram Younga jest prostokątem $m \times (n-m)$.

Sprawdzimy teraz, jaki jest związek nowo zdefiniowanej klasy s_1 z formą symplektyczną ω na Grassmannianie. Niech $[\lambda] \in H_2(Gr_m(n))$ będzie klasą taką, że $s_1([\lambda]) = 1$ diagram Younga odpowiadający klasie λ to pojedyncza klatka. Niech teraz $V_\lambda \subset Gr_m(n)$ takie, że $\rho_{\bar{\sigma}}(V_\lambda) = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^{N-1}$. Forma ω została unormowana w ten sam sposób. A zatem $[s_1] = [\omega]$, a co za tym idzie ich odpowiednie ewaluacje są równe,

$$\int_{Gr_m(n)} \omega^{m(n-m)} = \int_{Gr_m(n)} s_1^{m(n-m)} = C \int_{Gr_m(n)} \omega_{m(n-m)}.$$

Ponieważ, jak wspomnieliśmy, istnieje tylko jedna komórka maksymalnego wymiaru dostajemy drugą równość. Z faktu, że $\int_{Gr_m(n)} s_{m(n-m)} = 1$ wynika, że $C = Vol(Gr_m(n))$. Współczynnik C możemy obliczyć korzystając z formuły Pieri, która pokazuje jak należy mnożyć klasy odpowiadające diagramom Younga o jednej kolumnie bądź jednym wierszu przez dowolne inne klasy.

Fakt (Formuła Pieri [Fu, s. 24])**.** *Niech κ_λ oznacza diagram Younga odpowiadający podziałowi λ*

$$\kappa_\lambda \cdot \kappa_k = \sum_{\lambda'} \kappa_{\lambda'},$$

gdzie k odpowiada diagramowi o jednym wierszu, a suma przebiega po diagramach λ' powstałych z λ przez dodanie k klatek, z których żadne dwie nie zostały dodane w tej samej kolumnie. Analogicznie

$$\kappa_\lambda \cdot \kappa_{1^k} = \sum_{\lambda'} \kappa_{\lambda'},$$

gdzie 1^k odpowiada diagramowi o jednej kolumnie, a suma przebiega po diagramach λ' powstałych z λ przez dodanie k klatek, z których żadne dwie nie zostały dodane w tym samym wierszu.

Domnażanie przez klasę s_1 polega więc na takim dostawieniu jednej klatki w diagramie Younga, by otrzymany diagram dalej był diagramem Younga oraz by maksymalny wiersz nie przekroczył $n - m$, a maksymalna kolumna m. Niech diagram Younga Y będzie diagramem powstałym tak, że w każdym kroku dostawiamy klatkę zgodnie z powyższą regułą. Przez Y^* oznaczymy wypełnienie diagramu liczbami. Niech $Y^*(i, j)$ będzie równe numerowi kroku, w którym dostawiliśmy tę klatkę. Wówczas diagram Y wraz z tym przyporządkowaniem spełnia warunek

$$Y^*(i, j) = \max_{k<i, l<j} Y^*(k, l).$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\ \text{dobrze} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array}\ \text{źle}$$

Definicja 3.2.2. *Hakiem klatki (i, j) nazywamy zbiór*

$$h(i, j) = \{(k, l) \in Y : (k \geqslant i \wedge l = j) \vee (k = i \wedge l \geqslant j),$$

Długością haka nazwiemy moc tego zbioru.

Fakt (Formuła Haków [Fu, s. 53])**.** *Liczba możliwych ponumerowań diagramu Younga Y (dla liczby d) w podany powyżej sposób opisana jest wzorem*

$$L(Y) = \frac{d!}{\prod_{(i,j)\in Y} |h(i, j)|}$$

Dla prostokątnego diagramu Younga o wymiarach $m \times (n-m)$ długość haka klatki (i,j) wynosi $m-i+n-j+1$. Korzystając z formuły Haków oraz faktu, że $s_1^{m(n-m)} = L(Y)s_{m(n-m)}$ otrzymujemy następujący wzór na objętość Grassmannianu

$$Vol(Gr_m(n)) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n-m}\prod_{j=1}^{m}|h(i,j)|}.$$

Wniosek. *Otrzymujemy formułe kombinatoryczną*

$$\sum_{0<i_1<\dots<i_m\leqslant n} \frac{(-\sum_{k=1}^m i_k)^{m(n-m)}\prod_{k<l}(i_l-i_k)^2}{\prod_{k=1}^m(-1)^{i_k-i}(i_k-1)!(n-i_k)!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n-m}\prod_{j=1}^m(m-i+n-j+1)}.$$

3.3. Objętość Grassmannianu Lagrange'a

Przypomnijmy najpierw podstawowe definicje.

Niech V będzie $2n$-wymiarową przestrzenią liniową wyposażoną w dwuliniową, antysymetryczną, niezdegenerowaną formę zamkniętą η. Taką parę (V,η) będziemy nazywali przestrzenią symplektyczną. W symplektycznej przestrzeni liniowej wymiaru $2n$ istnieje baza $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n$ taka, że $\eta(p_i,q_j)=\delta_{i,j}$ oraz $\eta(p_i,p_j)=\eta(q_i,q_j)=0$. Wybierzmy taką bazę w przestrzeni $\mathbb{C}^{2n}$. Niech $L = Lin\{v_1,\dots,v_n\}$ będzie podprzestrzenią Lagrange'a.

Definicja 3.3.1. Dopełnieniem symplektycznym *podprzestrzeni $W \subset V$ nazywamy*

$$W^\perp = \{v \in V : \eta(v,w) = 0 \ \forall_{w\in W}\}.$$

Zauważmy, że $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$, ponieważ $\eta : W \to W^*$ jest liniowym izomorfizmem ($\dim \operatorname{im}\eta + \dim\ker\eta = \dim W$)

Definicja 3.3.2. Podprzestrzenią Lagrange'a *nazywamy taką podprzestrzeń liniową $W \subset V$, że $W = W^\perp$. Zatem $\dim W = n$.*

Definicja 3.3.3. *Grassmannianem Lagrange'a oznaczanym $LGr(n)$ będziemy nazywali podzbiór $Gr_n(2n)$ składający się tylko z podprzestrzeni Lagrange'a. Przypomnijmy, że rozpatrujemy Grassmanniany zespolone.*

Chcemy tak dobrać wagi w_i działania S^1 na $\mathbb{C}^{2n}$, żeby było ono również dobrze określone na $LGr(n)$. Działanie musi zatem zachowywać strukturę symplektyczną

$$\omega(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow \omega(\theta(\alpha),\theta(\beta)) = 0 \qquad \theta \in S^1.$$

Niech $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ oraz $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n,\beta^1,\dots,\beta^n)$. Wówczas

$$\omega(\theta\alpha,\theta\beta) = \sum \theta^{w_i}\theta^{w_{n+i}}\alpha_i\beta^i - \theta^{w_i}\theta^{w_{n+i}}\alpha^i\beta_i = \sum \theta^{w_i+w_{n+i}}(\alpha_i\beta^i - \alpha^i\beta_i).$$

Weźmy $w_i = -w_{i+n} = i$ dla $i = 1,\dots,n$. Będziemy indeksowali kolumny wagami.

Mamy ciąg n różnych liczb całkowitych z przedziału $[-n,\dots,-1,1,\dots,n]$ przy czym, jeśli k występuje w tym ciągu to $-k$ już nie może. Zbiór wszystkich takich dopuszczalnych ciągów, a zatem i punktów stałych oznaczymy Fix. Niech $I = (i_1,\dots,i_n) \in Fix$. Wtedy przestrzeń styczna ma postać

$$\begin{array}{ccccccccc} & & i_1 & & i_k & & i_m & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} * & \dots & 1 & \dots & \delta_{1,i_k} & \dots & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \delta_{2,i_k} & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & 0 & \dots & \delta_{m,i_k} & \dots & 1 & \dots & * \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że dla v_k, v_l wierszy powyższej macierzy zachodzi

$$\omega(v_k, v_l) = v_{l,-i_k} - v_{k,-i_l} = 0,$$

a zatem tę przestrzeń styczną możemy utożsamiać z przestrzenią macierzy symetrycznych $n \times n$. Jej wymiar to $n(n+1)/2$. Obliczając $e(p_I)$ musimy uważać, by nie wymnożyć dwa razy niektórych wag, Poniższy wzór ilustruje ten warunek

$$e(I) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} -i_k - i_l.$$

Zobaczmy to na prostym przykładzie $LGr(3)$, $I = (-2, 1, 3)$,

$$\begin{pmatrix} * & 1 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 1 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{działanie}} \begin{pmatrix} \theta^{-3} & \theta^{-2} & \theta^{-1} & 0 & \theta^2 & 0 \\ \theta^{-3} & 0 & \theta^{-1} & \theta & \theta^2 & 0 \\ \theta^{-3} & 0 & \theta^{-1} & 0 & \theta^2 & \theta^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normalizacja}} \begin{pmatrix} \boxed{\theta^{-1}} & 1 & \boxed{\boxed{\theta}} & 0 & \theta^4 & 0 \\ \boxed{\boxed{\boxed{\theta^{-4}}}} & 0 & \theta^{-2} & 1 & \boxed{\boxed{\theta}} & 0 \\ \theta^{-6} & 0 & \boxed{\boxed{\boxed{\theta^{-4}}}} & 0 & \boxed{\theta^{-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Wartość funkcji e otrzymujemy wymnażając po jednej wadze z każdej tak samo oznaczonej pary oraz domnażając przez wszystkie pozostałe wagi

$$e(p_{(-2,1,3)}) = (-1) \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot (-6) = 192$$

Funkcja Hamiltona zadana jest wzorem

$$H([z_0 : \dots : z_{N-1}]) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} i_k |z_k|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2}.$$

Możemy więc obliczyć objętość Grassmannianu Lagrange'a korzystając z twierdzenia DH

$$Vol(LGr(n)) = \sum_{i \in Fix} \frac{(\sum_{j=1}^{n} i_j)^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} -(i_k + i_l)}.$$

Istnieje również inny sposób obliczenia objętości korzystający z rachunku Schuberta. Podajemy obliczenia za [Hi]

$$s_1^{n(n+1)/2} = s_{n(n+1)/2} 2^{\binom{n}{2}} \begin{cases} \dfrac{\binom{n+1}{2} 2!4! \dots (n-2)!}{(n+1)!(n+3)! \dots (2n-1)!} & \text{dla } n \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{\binom{n+1}{2} 2!4! \dots (n-2)!}{(n)!(n+2)! \dots (2n-1)!} & \text{dla } n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Tym razem dostajemy następującą tożsamość kombinatoryczną,

$$\sum_{i \in Fix} \frac{(\sum_{j=1}^{n} i_j)^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} -(i_k + i_l)} = 2^{\binom{n}{2}} \begin{cases} \dfrac{\binom{n+1}{2} 2!4! \dots (n-2)!}{(n+1)!(n+3)! \dots (2n-1)!} & \text{dla } n \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{\binom{n+1}{2} 2!4! \dots (n-2)!}{(n)!(n+2)! \dots (2n-1)!} & \text{dla } n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Dodatek

Część A

Pierwszy kod liczy objętości dla Grassmannianów zespolonych. Argumentami funkcji `e` są wektor `v` wyznaczający punkt stały oraz `n` dla $Gr_m(n)$. `H` jest hamiltonianem w punkcie stałym `v`, natomiast `Vol(m,n)` wylicza objętość $Gr_m(n)$.

```
e[v_, n_] :=
    Product[(-1)^(v[[i]] - i) (v[[i]] - 1)! (n - v[[i]])!, {i, Length[v]}]/
    Product[Product[(v[[i]] - v[[j]])^2, {j, i - 1}], {i, Length[v]}]
H[v_] := Apply[Plus, v]
Vol[m_, n_] :=
    Sum[(-H[v])^(m*(n - m))/e[v, n], {v, Subsets[Table[i, {i, n}], {m}]}]
```

Poniższy kod natomiast pozwala obliczyć tą samą objętość korzystając z formuły Haków. `h` jest długością haka klatki (k, l) w diagramie $i \times j$, a `Ho` jest właśnie formułą haków.

```
h[k_, l_, i_, j_] := (i - k) + (j - l) + 1
Ho[i_, j_] := (i*j)!/Product[h[k, l, i, j], {k, i}, {l, j}]
```

Tu z kolei kod obliczający objętość w przypadku Lagrange'a.

```
e[v_] := Product[-v[[k]] - v[[l]], {l, Length[v]}, {k, l}]
H[v_] := Apply[Plus, v]
Vol[m_] :=
      Sum[If[(Count[Abs[v], Commonest[Abs[v], 1][[1]]] == 1)
      \[And] (Apply[Times, Abs[v]] == m!), (-H[v])^(m (m + 1)/2)/
      e[v], 0], {v, Subsets[Table[i, {i, -m, m}], {m}]}]
```

Część B

W tej części podamy objętości Grassmannianów do wymiaru 18 wraz z rozkładem na czynniki pierwsze oraz pierwsze 10 wyników dla Grassmannianu Lagrange'a również z rozkładem na czynniki. $Vol(Gr(2,4)) = 2$

$Vol(Gr(2,5)) = 5$

$$\begin{aligned} Vol(Gr(2,6)) &= 14 \\ &= 2^1 \cdot 7^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Vol(Gr(3,6)) &= 42 \\ &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Vol(Gr(3,7)) &= 462 \\ &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Vol(Gr(2,8)) &= 132 \\ &= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Vol(Gr(3,8)) &= 6006 \\
&= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\
Vol(Gr(4,8)) &= 24024 \\
&= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\
Vol(Gr(2,9)) &= 429 \\
&= 3^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\
Vol(Gr(3,9)) &= 87516 \\
&= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \\
Vol(Gr(4,9)) &= 1662804 \\
&= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \\
Vol(Gr(2,10)) &= 1430 \\
&= 2^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\
Vol(Gr(3,10)) &= 1385670 \\
&= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \\
Vol(Gr(4,10)) &= 140229804 \\
&= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^2 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^1 \\
Vol(Gr(5,10)) &= 701149020 \\
&= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^2 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^1 \\
Vol(Gr(9,18)) &= 2203813784150745461239539149086185470859748560000 \\
&= 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \cdot 13^1 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41^1 \cdot 43^1 \cdot 47^1 \cdot 53^1 \cdot 59^1 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 71^1 \\
&\quad \cdot 73^1 \cdot 79^1
\end{aligned}
$$

Prowadząc eksperymenty samemu obliczyłem objętości dla $Gr_2(n)$ dla $n \in \{4, \dots, 100\}$. Ich rozkład na czynniki charakteryzował się dużą ilością dużych liczb pierwszych w pierwszej potędze. W potęgach wyższych występowało jedynie kilka pierwszych liczb pierwszych. Korzystając ze wzorów otrzymanych za pomocą twierdzenia DH nie bardzo wiadomo dlaczego pojawia się taka regularność(sumy dużej liczby składników). Natomiast dzięki spojrzeniu z perspektywy diagramów Younga i formuły haków takie wyniki nie są już zaskakujące. Mając silnie dużej liczby w liczniku oraz iloczyn wielu znacznie mniejszych liczb w mianowniku wszystkie większe czynniki złożone z silni się skracają, a pozostają jedynie duże liczby pierwsze w pierwszych potęgach.

$$
\begin{aligned}
LGr(2) &= 2 \\
LGr(3) &= 16 = 2^4 \\
LGr(4) &= 768 \\
&= 2^8 \cdot 3^1 \\
LGr(5) &= 292864 \\
&= 2^{11} \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\
LGr(6) &= 1100742656 \\
&= 2^{18} \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \\
LGr(7) &= 48608795688960 \\
&= 2^{25} \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^1 \\
LGr(8) &= 29258366996258488320 \\
&= 2^{34} \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 17^2 \cdot 19^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1 \cdot 31^1 \\
LGr(9) &= 273035280663535522487992320 \\
&= 2^{41} \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 17^1 \cdot 19^2 \cdot 23^1 \cdot 29^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 41^1 \cdot 43^1 \\
LGr(10) &= 44261486084874072183645699204710400 \\
&= 2^{50} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^2 \cdot 29^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 41^1 \cdot 43^1 \cdot 47^1 \cdot 53^1 \\
LGr(11) &= 138018895500079485095943559213817088756940800 \\
&= 2^{64} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 19^1 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^1 \cdot 41^1 \cdot 43^1 \cdot 47^1 \cdot 53^1 \cdot 59^1 \cdot 61^1
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[At-Bo] Michael Francis Atiyah i Raul Bott *The Moment Map and the Equivariant Cohomology* Topology **23**, (1984), 1–28.

[Fu] William Fulton, *Young tableaux : with applications to representation theory and geometry*, Cambridge University Press 1997.

[Gu-St] Victor William Guillemin i Shlomo Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Springer, 1999.

[Hi] Howard Hiller, *Combinatorics and intersections of Schubert varieties*, Comment. Math. Helvetici, **57**, (1982), 41–59.

[Jac] Stefan Jackowski, *Twierdzenie o Lokalizacji i Uzupełnianiu w Ekwiwariantnych Teoriach Kohomologii* Praca Doktorska, Warszawa 1976.

[Kir] Frances Clare Kirwan, *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*, Princeton University Press 1984.

[McD-S] Dusa McDuff i Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1998.